Livro (e-book): Linearidade em Sinais e Sistemas, Ivanil S. Bonatti, Amauri Lopes, Pedro L. D. Peres, Cristiano M. Agulhari,

Ed. Blucher, SP, 2015, 1ed., ISBN: 9788521208921.

Prof. Pedro L. D. Peres

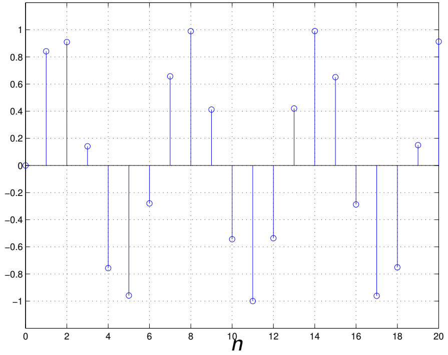
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Sinais Discretos

Definição 1 (Sinais Discretos)

Um sinal discreto, denotado $x[n]$*, é uma função (real ou complexa) cujo domínio é o conjunto dos inteiros* $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Exemplo: $x[n] = \mathrm{sen}(n)$ (comando `stem` do Matlab)



Degrau Unitário

Definição 2 (Degrau Unitário)

Considere $n \in \mathbb{Z}$. O sinal discreto $u[n]$ (degrau unitário) é definido como

$$u[n] = \begin{cases} 0 & \textit{para } n = -\infty, \ldots, -2, -1 \\ 1 & \textit{para } n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty \end{cases}$$

Para $a \in \mathbb{R}$ não inteiro, $u[a] = 0$. Assim, $x[n] = u[n/2]$, $n \in \mathbb{Z}$, é a sequência que vale 1 para $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$ e zero para os demais inteiros (negativos e positivos ímpares).

Impulso

Definição 3 (Impulso)

Considere $n \in \mathbb{Z}$. O sinal discreto $\delta[n]$ (impulso unitário) é definido como

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 \ , & n = 0 \\ 0 \ , & n \neq 0 \end{cases}$$

Note que $\delta[n+3] = 1$ para $n = -3$ e $\delta[n+3] = 0$ para $n \neq -3$. Para $a \in \mathbb{R}$ não inteiro, $\delta[a] = 0$. Assim, $\delta[2n+3] = 0$ para todo n, pois não existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $2n+3 = 0$.

Exemplo: $x[n] = u[n-1] - u[n] + (2-n)(u[n-1] - u[n-2])$

Função Par e Função Ímpar

Definição 4 (Função Par e Função Ímpar)

$$x[n] = x[-n] \quad \text{é par} \quad , \quad x[n] = -x[-n] \quad \text{é ímpar}$$

Propriedade 1 (Sinais Pares e Ímpares)

- *Combinações lineares de sinais pares produzem sinais pares;*
- *Combinações lineares de sinais ímpares produzem sinais ímpares;*
- *O produto de função par por função ímpar é ímpar;*
- *O produto de função par por função par é par;*
- *O produto de função ímpar por função ímpar é par;*

Função Par e Função Ímpar

Propriedade 1 (Sinais Pares e Ímpares (cont.))

- $x[n]$ *par* $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = x[0] + 2\sum_{n=1}^{+\infty} x[n]$
- $x[n]$ *ímpar* $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = 0 \quad , \quad x[0] = 0$
- $x_p[n] = \dfrac{1}{2}\big(x[n] + x[-n]\big)$ *é par*
- $x_i[n] = \dfrac{1}{2}\big(x[n] - x[-n]\big)$ *é ímpar*
- $x[n] = x_p[n] + x_i[n]$ $x_p[n]$ *é a parte par e* $x_i[n]$ *é a parte ímpar de* $x[n]$

Exemplo: $x[n] = -\delta[n+1] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

Sistemas Discretos

Definição 5 (Sistemas Discretos)

São sistemas cujas entradas e saídas são sequências enumeráveis de escalares reais ou complexos.

Notação: $y[n] = \mathscr{G}\{x[n]\}$, *sendo* $x[n]$ *a entrada e* $y[n]$ *a saída.*

Exemplo: Filtro passa-alta

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{2} \;, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Para $x[n] = (-1)^n$, a saída é $y[n] = (-1)^n$. Para $x[n] = 1^n$, tem-se $y[n] = 0$.

Exemplo: A população anual de peixes em um lago (em termos percentuais) pode ser descrita de maneira aproximada por

$$y[n+1] - ay[n](1 - y[n]) = 0 \;, \quad 0 \leq y[0] \leq 1$$

sendo a um parâmetro real que representa as condições ambientais do lago.

Sistemas Lineares

Definição 6 (Sistemas Lineares)

Um sistema é linear se satisfaz o princípio da superposição, isto é,

$$\mathscr{G}\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\} = a_1\mathscr{G}\{x_1[n]\}+a_2\mathscr{G}\{x_2[n]\}$$

Observe que, para sistemas lineares, $\mathscr{G}\{0\}=0$. O filtro passa-alta mostrado anteriormente é um sistema linear e o modelo da população de peixes é um exemplo de sistema não-linear (que pode apresentar comportamento caótico para alguns valores de a).

Invariante no tempo

Definição 7 (Invariante no tempo)

Um sistema é invariante no tempo se um deslocamento da entrada produzir igual deslocamento na saída, isto é,

$$y[n-m] = \mathscr{G}\{x[n-m]\}$$

para qualquer $m \in \mathbb{Z}$.

O filtro passa-alta e o modelo de população de peixes são sistemas invariantes no tempo.

Exemplo:

$y[n] = \operatorname{sen}(x[n])$ é não linear e invariante no tempo.

$y[n] = nx[n]$ é linear e variante no tempo.

Sistema sem Memória

Definição 8 (Sistema sem Memória)

Um sistema é sem memória se a saída no instante n depende apenas do sinal de entrada no instante n.

Exemplo: O somador (ou acumulador)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

é um sistema discreto com memória, que pode ser descrito pela equação a diferenças $y[n] - y[n-1] = x[n]$.

Sistema Causal

Definição 9 (Sistema Causal)

Um sistema é causal ou não antecipativo quando a saída não depende de valores futuros da entrada.

Exemplo:

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{+M} x[n-k] \quad , \quad M > 0$$

é não causal.

Sistema BIBO Estável

Definição 10 (Sistema BIBO Estável)

Um sistema é BIBO estável (Bounded-Input Bounded-Output) *se a saída é limitada para toda entrada limitada.*

$$|x[n]| < b \quad \Rightarrow \quad |y[n]| < +\infty$$

Exemplo:

$$y[n] = nx[n]$$

é um sistema causal não BIBO estável.

Exemplo:

$$y[n] = x[-n]$$

é um sistema não causal e BIBO estável.

Resposta ao Impulso

Definição 11 (Resposta ao Impulso)

Resposta ao impulso é a saída do sistema quando a entrada é a função impulso e as condições iniciais são nulas (sistema em repouso), isto é

$$h[n] = \mathscr{G}\{\delta[n]\}$$

Exemplo: Somador

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

A resposta ao impulso é

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n]$$

Convolução e Propriedades

Definição 12 (Convolução)

Convolução é a operação

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k]x_2[n-k]$$

Propriedade 2

Se

$$x_1[n] = x_1[n]u[n] \quad e \quad x_2[n] = x_2[n]u[n]$$

então

$$x_1[n] * x_2[n] = u[n] \sum_{k=0}^{n} x_1[k]x_2[n-k]$$

Convolução e Propriedades

Propriedade 3

O impulso é o elemento neutro da convolução, pois

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Propriedade 4

A convolução é comutativa, associativa e distributiva em relação à soma, isto é

$$x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$$

$$x_1[n] * \big(x_2[n] * x_3[n]\big) = \big(x_1[n] * x_2[n]\big) * x_3[n] = x_1[n] * x_2[n] * x_3[n]$$

$$x_1[n] * \big(x_2[n] + x_3[n]\big) = x_1[n] * x_2[n] + x_1[n] * x_3[n]$$

Convolução e Propriedades

Propriedade 5

$$x[n] * \delta[n-m] = x[n-m] \quad , \quad m \in \mathbb{Z}$$

pois

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k-m] = x[n-m]$$

Teorema 1 (Convolução com a Resposta ao Impulso de um SLIT)

A saída de um sistema linear invariante no tempo é a convolução da resposta ao impulso com a entrada, isto é

$$y[n] = \mathscr{G}\{x[n]\} = x[n] * h[n] \quad , \quad h[n] = \mathscr{G}\{\delta[n]\}$$

pois

$$\mathscr{G}\{x[n]\} = \mathscr{G}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\mathscr{G}\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Convolução e Propriedades

- No exemplo do somador, a saída é a convolução da entrada com o degrau

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] * u[n]$$

pois

$$x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\underbrace{u[n-k]}_{=1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} x[k]\underbrace{u[n-k]}_{=0}$$

Propriedade 6

Considere o sinal

$$x_2[n] = \sum_{k\in\mathbb{I}} a_k \delta[n-b_k] \quad , \quad \mathbb{I} = \{\textit{conjunto finito de índices}\}$$

Então,

$$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k\in\mathbb{I}} a_k x_1[n-b_k]$$

Exemplo: $x_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] \quad , \quad x_2[n] = -\delta[n] + \delta[n-1]$

Resposta ao impulso e causalidade

Propriedade 7

Sistemas lineares invariantes no tempo são causais se e somente se a resposta ao impulso é nula para instantes negativos, ou seja

$$h[n] = 0 \ \textit{para} \ n < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \textit{sistema causal}$$

pois

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{-1} x[n-k]h[k] + \sum_{k=0}^{+\infty} x[n-k]h[k]$$

e, se $h[k] \neq 0$ *para* $k < 0$*, a saída* $y[n]$ *dependeria de valores futuros da entrada* $x[n]$*.*

Exemplo: O sistema linear invariante no tempo cuja resposta ao impulso é

$$h[n] = \delta[n+1]$$

é não causal, pois $h[-1] = 1$. Note que $y[n] = x[n] * h[n] = x[n+1]$.

Resposta ao impulso e BIBO estabilidade

Propriedade 8

Sistemas lineares invariantes no tempo são BIBO estáveis se e somente se a resposta impulso é absolutamente somável, isto é

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \textit{BIBO estável}$$

Prova: Suficiência: se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$ então $|x[n]| \leq b$ implica

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[n-k]||h[k]| \leq b \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < +\infty$$

Resposta ao impulso e BIBO estabilidade

Necessidade: considere a entrada limitada $x[n] = \text{sinal}(h[-n])$ sendo

$$\text{sinal}(v) = \begin{cases} 1 & , \quad v > 0 \\ -1 & , \quad v < 0 \end{cases}$$

A saída $y[n]$, para $n = 0$, é

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinal}(h[k])h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|$$

e, portanto, para que a saída $y[n]$ seja limitada, é necessário que a resposta ao impulso seja absolutamente somável.

Resposta ao impulso e BIBO estabilidade

Exemplo:
Considere um sistema linear invariante no tempo cuja resposta ao impulso é dada por

$$h[n] = \rho^n u[n], \quad 0 < \rho < 1$$

Trata-se de um sistema causal BIBO estável, pois $h[n] = 0$ para $n < 0$ e

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}$$

Auto-função

Definição 13 (Auto-função)

Um sinal de entrada é denominado auto-função de um sistema se a saída correspondente for igual ao sinal de entrada multiplicado por uma constante (em geral complexa).

Propriedade 9 (Auto-função)

O sinal z^n, $z \in \mathbb{C}$, é uma auto-função para sistemas lineares discretos invariantes no tempo se a somatória

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$$

for finita, ou seja, se z pertence ao domínio Ω_h de $H(z)$, pois

$$y[n] = z^n * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k} = H(z)z^n$$

A função $H(z)$ é denominada transformada Z da resposta ao impulso do sistema, ou função de transferência.

A transformada Z de uma sequência $x[n]$ (será vista no Capítulo 2) é dada por

$$X(z) = \mathscr{Z}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}$$

com domínio Ω_x, isto é, conjunto dos $z \in \mathbb{C}$ (complexos) tais que a soma é finita.

Exemplo

Considere a resposta ao impulso dada por $h[n] = 3^n u[n]$.

A transformada Z de $h[n]$ é dada por

$$H(z) = \mathscr{Z}\{h[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 3^k u[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (3/z)^k = \frac{1}{1-3/z} = \frac{z}{z-3}, \quad |3/z| < 1$$

Portanto, o domínio Ω_h (conjunto dos $z \in \mathbb{C}$ tais que a soma é finita) é dado por

$$\Omega_h = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$$

Auto-função

- A relação (temporal) entre saída e entrada em um sistema linear discreto invariante no tempo é dada pelo "ganho complexo" $H(z)$ quando $x[n] = z^n$.

Exemplo: A função de transferência $H(z)$ de um sistema linear invariante no tempo $y[n] = \mathscr{G}\{x[n]\}$ descrito por

$$y[n+1] = v[n] + x[n] \ , \ v[n+1] = -2v[n] - 2y[n] + 2x[n+1] - x[n]$$

é dada por (considerando $px[n] = x[n+1]$, $p^2x[n] = x[n+2], \ldots$)

$$(p^2 + 2p + 2)y[n] = (3p+1)x[n] \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{3z+1}{z^2+2z+2}$$

A saída $y[n]$ do sistema para a entrada

$$x[n] = 2^n + (2j)^n + \exp(2jn)$$

é dada por

$$y[n] = (0.7)2^n + 1.36\exp(-j0.629)(2j)^n + 2.32\exp(j0.542)\exp(j2n)$$

Note que só é possível calcular $y[n] = H(z)z^n$ quando $H(z)$ é finito. Note ainda que a solução $y[n]$, as vezes denominada forçada ou de regime, é computada sem considerar condições iniciais.

Transformada da Convolução

Propriedade 10 (Transformada da Convolução)

A transformada Z da convolução de dois sinais é o produto das transformadas, ou seja,

$$\mathscr{Z}\{x[n] = x_1[n] * x_2[n]\} = \mathscr{Z}\{x_1[n]\}\mathscr{Z}\{x_2[n]\} \quad , \quad \Omega_x \supseteq \Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$$

Exemplo: A função de transferência do sistema dado pela associação em cascata de dois sistemas cujas respostas ao impulso são

$$h_1[n] = (0.5)^n u[n], \quad h_2[n] = (0.2)^n u[n]$$

é dada por

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-0.2)}, \quad |z| > 0.5$$

pois

$$H_1(z) = \frac{z}{z-0.5}, \quad |z| > 0.5, \qquad H_2(z) = \frac{z}{z-0.2}, \quad |z| > 0.2$$

Convolução de duas sequências ($\rho_1 \neq \rho_2$)

$$(\rho_1^n u[n]) * (\rho_2^n u[n]) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_1^k u[k] \rho_2^{n-k} u[n-k] = \rho_2^n u[n] \sum_{k=0}^{n} (\rho_1/\rho_2)^k$$

$$= \rho_2^n \left(\frac{1-(\rho_1/\rho_2)^{n+1}}{1-(\rho_1/\rho_2)} \right) u[n] = \left(\frac{\rho_2^{n+1} - \rho_1^{n+1}}{\rho_2 - \rho_1} \right) u[n]$$

$$= \rho_1^n \left(\frac{1-(\rho_2/\rho_1)^{n+1}}{1-(\rho_2/\rho_1)} \right) u[n] = \left(\frac{\rho_1^{n+1} - \rho_2^{n+1}}{\rho_1 - \rho_2} \right) u[n]$$

Equivalentemente,

$$\mathscr{Z}\{(\rho_1^n u[n]) * (\rho_2^n u[n])\} = \frac{z^2}{(z-\rho_1)(z-\rho_2)}, \quad |z| > \max\{|\rho_1|, |\rho_2|\}$$

$$\frac{z^2}{(z-\rho_1)(z-\rho_2)} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho_2} \right) \frac{z}{z-\rho_1} + \left(\frac{\rho_2}{\rho_2-\rho_1} \right) \frac{z}{z-\rho_2}$$

cuja transformada inversa é

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho_2} \right) \rho_1^n u[n] + \left(\frac{\rho_2}{\rho_2-\rho_1} \right) \rho_2^n u[n] = \left(\frac{\rho_1^{n+1} - \rho_2^{n+1}}{\rho_1 - \rho_2} \right) u[n]$$

Convolução de duas sequências $\rho^n u[n]$

$$(\rho^n u[n]) * (\rho^n u[n]) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho^k u[k] \rho^{n-k} u[n-k] = \rho^n u[n] \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)\rho^n u[n]$$

$$\mathscr{Z}\{(\rho^n u[n]) * (\rho^n u[n])\} = \frac{z^2}{(z-\rho)^2}, \quad |z| > |\rho|$$

O mesmo resultado pode ser obtido do exemplo anterior, por l'Hôpital. Fazendo $\rho_1 = \rho + \Delta$, $\rho_2 = \rho$ e $\Delta \to 0$, tem-se

$$\lim_{\Delta \to 0} \left(\frac{(\rho+\Delta)^{n+1} - \rho^{n+1}}{\rho + \Delta - \rho} \right) u[n] = \lim_{\Delta \to 0} (n+1)(\rho+\Delta)^n u[n] = (n+1)\rho^n u[n]$$

Resposta em frequência

Definição 14 (Resposta em frequência)

Se $z = \exp(j\omega)$ (círculo unitário) pertence ao domínio da função de transferência do sistema linear invariante no tempo $H(z)$, a resposta em frequência do sistema é o valor de $H(z)$ computado para $z = \exp(j\omega)$.

A resposta em frequência escreve-se como

$$M(\omega)\exp(j\phi(\omega)) = H(z)\Big|_{z=\exp(j\omega)} = H\big(\exp(j\omega)\big)$$

sendo $M(\omega)$ o módulo e $\phi(\omega)$ a fase de $H(z)\Big|_{z=\exp(j\omega)}$

Em geral, é desenhada na forma de módulo e fase (diagrama de Bode) ou na forma polar, para $\omega \in [-\pi, +\pi]$. Representa a resposta em regime permanente de sistemas lineares invariantes no tempo estáveis para entradas senoidais.

Resposta em frequência

Propriedade 11

Se $h[n]$ é real, então $H\big(\exp(j\omega)\big)^* = H\big(\exp(-j\omega)\big)$, isto é $M(\omega)$ é uma função par e $\phi(\omega)$ é uma função ímpar.

Exemplo: Considere o filtro passa-alta, dado por

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{2} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

Para $x[n] = z^n$ tem-se $y[n] = H(z)z^n$, resultando na função de transferência

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1})}{2}$$

Portanto, a resposta em frequência é

$$H(z)\Big|_{z=\exp(j\omega)} = \frac{1 - \exp(-j\omega)}{2} =$$

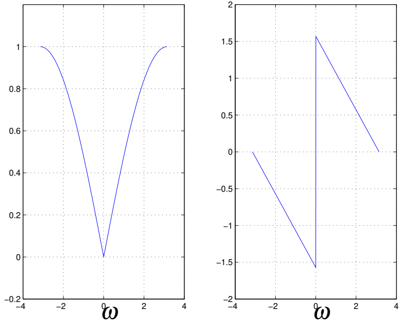
$$= j\exp(-j\omega/2)\left(\frac{\exp(j\omega/2) - \exp(-j\omega/2)}{2j}\right) = j\exp(-j\omega/2)\mathrm{sen}(\omega/2)$$

Resposta em frequência

Portanto, tem-se

$$M(\omega) = |\text{sen}(\omega/2)|, \qquad \phi(\omega) = \frac{\pi}{2}\text{sinal}(\omega) - \frac{\omega}{2}$$

$M(\omega)$ e $\phi(\omega)$ são mostrados na Figura. Observe o crescimento de $M(\omega)$ para ω de 0 a $+\pi$ (filtro passa-alta) e a entrada $z = (1)^n$ corresponde à frequência $\omega = 0$ e que $z = (-1)^n$ corresponde à frequência $\omega = +\pi$. Note também que, para $\omega > 0$ ou para $\omega < 0$, a fase varia linearmente com a frequência.



$M(\omega)$ (módulo) e $\phi(\omega)$ (fase) do filtro passa-alta.

Propriedade 12 (Função de transferência racional)

A equação a diferenças

$$D(p)y[n] = N(p)x[n] \quad , \quad D(p) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k \; ; \; N(p) = \sum_{k=0}^{\ell} \beta_k p^k$$

com $\alpha_m = 1$, α_k *e* β_k *coeficientes constantes e condições iniciais nulas descreve um sistema linear invariante no tempo, cuja função de transferência é*

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad \textit{pois}$$

$$D(p)H(z)z^n = N(p)z^n \quad \Rightarrow \quad H(z)D(z) = N(z)$$

- *Para sistemas causais,* $m \geq \ell$ *e o domínio* Ω_h *de existência de* $H(z)$ *é o exterior do menor círculo que contém todos os polos de* $H(z)$. *Em funções racionais, polos são as raízes do denominador e zeros são as raízes do numerador.*
- *Sistemas lineares invariantes no tempo causais descritos por funções de transferência racionais são BIBO estáveis se e somente se os polos estiverem no interior do círculo unitário.*

Função de transferência racional

Exemplo: O sistema

$$y[n+2] - \frac{1}{4}y[n] = x[n+1]$$

pode ser escrito como

$$D(p)y[n] = N(p)x[n]$$

com

$$D(p) = p^2 - \frac{1}{4} \quad , \quad N(p) = p$$

que resulta na função de transferência

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{z}{z^2 - 0.25} = \frac{4z}{(2z+1)(2z-1)}$$

Note que os polos são ± 0.5, indicando que trata-se de um sistema BIBO estável. Além disso, se o domínio de existência de $H(z)$ for dado por

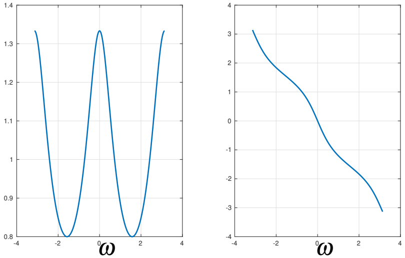
$$\Omega_h = \{z \in \mathbb{C}, |z| > 0.5\}$$

tem-se que o sistema é causal.

Função de transferência racional

A Figura mostra a resposta em frequência de

$$\frac{4z}{(2z+1)(2z-1)}$$



$M(\omega)$ (módulo) e $\phi(\omega)$ (fase) do sistema.

Propriedade 13 (Resposta a entradas senoidais)

A resposta em regime de um sistema linear invariante no tempo estável com função de transferência $H(z)$*, com* $h[n]$ *real e* $z = \exp(j\omega) \in \Omega_h$*, para a entrada* $x[n] = \cos(\omega n)$*, é*

$$y[n] = M(\omega)\cos(\omega n + \phi(\omega))$$

e, para a entrada $x[n] = sen(\omega n)$*, é*

$$y[n] = M(\omega) sen(\omega n + \phi(\omega))$$

sendo $M(\omega)$ *o módulo e* $\phi(\omega)$ *a fase de* $H(z)\Big|_{z=\exp(j\omega)}$

$$\text{Prova:}\quad y[n] = \mathscr{G}\{\cos(\omega n)\} = \frac{1}{2}\mathscr{G}\{\exp(j\omega n)\} + \frac{1}{2}\mathscr{G}\{\exp(-j\omega n)\} =$$

$$= \frac{1}{2}H\big(\exp(j\omega)\big)\exp(j\omega n) + \frac{1}{2}H\big(\exp(-j\omega)\big)\exp(-j\omega n) =$$

$$= \frac{1}{2}M(\omega)\exp(j\omega n + j\phi(\omega)) + \frac{1}{2}M(\omega)\exp(-j\omega n - j\phi(\omega)) = M(\omega)\cos(\omega n + \phi(\omega))$$

Resposta a entradas senoidais

Exemplo: A saída do sistema

$$H(z) = \frac{-0.5z^2}{(z-0.5)^2(z-2)} \quad , \quad 0.5 < |z| < 2$$

para $x[n] = 10\cos(\pi n/3) + 5\exp(j\pi n/5)$ é dada por

$$y[n] = 3.85\cos(\pi n/3 - 0.524) + 4.27\exp(j\pi n/5 - j0.459)$$

pois

$$H(z)\Big|_{z=\exp(j\pi/3)} = 0.385\exp(-j0.524) \quad , \quad H(z)\Big|_{z=\exp(j\pi/5)} = 0.854\exp(-j0.459)$$