Livro (e-book): Linearidade em Sinais e Sistemas, Ivanil S. Bonatti, Amauri Lopes, Pedro L. D. Peres, Cristiano M. Agulhari,

Ed. Blucher, SP, 2015, 1ed., ISBN: 9788521208921.

Prof. Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Transformada de Fourier de Sinais Contínuos I

A série de Fourier é adequada para a descrição de um sinal em um intervalo de tempo T, ou para sinais periódicos de período T.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(jk\omega_0 t) \ , \ |t| < \frac{T}{2} \text{ e } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad ; \quad c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\exp(-jk\omega_0 t)dt$$

A transformada de Fourier descreve apropriadamente sinais periódicos ou não periódicos (pulsos), como ilustrado na Figura 1.

Transformada de Fourier de Sinais Contínuos II

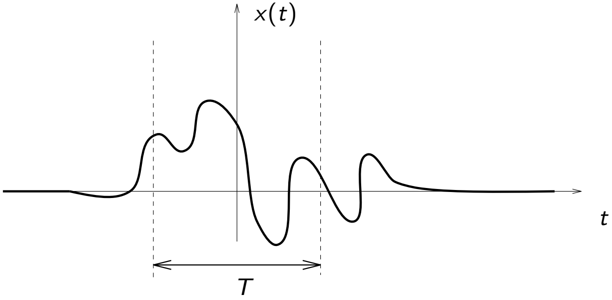

Figura: Sinal $x(t)$ descrito em um intervalo $(-T/2, T/2)$.

Transformada de Fourier de Sinais Contínuos III

Retomando a expressão para a série exponencial de Fourier, com $\Delta\omega = 2\pi/T$ e $X_k = Tc_k$, tem-se

$$x(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \exp(jk\Delta\omega t) \;\; ; \;\; |\, t \,| < T/2 \quad , \quad X_k = \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\exp(-jk\Delta\omega t)dt$$

Definindo a função $X(\omega)$, tal que $X(k\Delta\omega) = X_k$, tem-se

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\Delta\omega)\exp(jk\Delta\omega t)\Delta\omega \quad , \quad X(k\Delta\omega) = \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\exp(-jk\Delta\omega t)dt$$

Fazendo $T \to +\infty \;\Rightarrow\; \Delta\omega \to 0$, tem-se

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\exp(j\omega t)d\omega \quad , \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-j\omega t)dt$$

Definição 1 (Transformada de Fourier)

$$X(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-j\omega t)dt$$

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

Propriedade 1 (Condições suficientes para a existência da transformada de Fourier)

As condições suficientes são as mesmas que as da série de Fourier, estendidas para o intervalo infinito de integração. Por exemplo, sinais de energia (isto é, sinais quadraticamente integráveis).

Entretanto, a transformada de Fourier será também aplicada a outras classes de sinais, como por exemplo os sinais de potência (ex. sinais senoidais).

Propriedade 2

A transformada de Fourier é linear, ou seja

$$\mathscr{F}\{a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\} = a_1\mathscr{F}\{x_1(t)\}+a_2\mathscr{F}\{x_2(t)\}$$

Propriedade 3 (Valor na origem)

$$\mathscr{F}\{x(t)\} = X(\omega) \quad \Rightarrow \quad X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt \quad , \quad x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega$$

Observação: se as funções forem descontínuas em 0, *as integrais produzem o valor médio.*

Exemplo 1.1 (Exponencial Complexa)

A transformada de Fourier de

$$x(t) = \exp(-at)u(t) \quad , \quad \mathrm{Re}(a) > 0$$

é dada por

$$\mathscr{F}\left\{\exp(-at)u(t)\right\} = \frac{1}{j\omega + a}$$

pois

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-at)u(t)\exp(-j\omega t)dt = \int_{0}^{+\infty} \exp\left(-(j\omega + a)t\right)dt =$$

$$= \frac{-1}{j\omega + a}\exp\left(-(j\omega + a)t\right)\Big|_{0}^{+\infty}$$

Exemplo – Exponencial Complexa

Note que, da definição de transformada de Laplace, tem-se

$$\mathscr{L}\{\exp(-at)u(t)\} = \frac{1}{s+a} \quad , \quad \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

ou seja, a transformada de Fourier de $x(t) = \exp(-at)u(t)$ tem a mesma forma da transformada de Laplace, trocando-se s por $j\omega$. Note ainda que, se $\mathrm{Re}(a) < 0$, a transformada de Fourier não existe. Entretanto, a transformada de Laplace existe com um domínio que não contém $s = j\omega$

Pela Propriedade 3, tem-se

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-at)u(t)dt = \frac{-1}{a}\exp(-at)\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{a}$$

Propriedade 4

Para $x(t)$ real, o módulo de $X(\omega)$ é uma função par e a fase é ímpar, ou seja

$$\left.\begin{array}{l} \mid X(\omega) \mid = \mid X(-\omega) \mid \\ \\ \angle X(\omega) = -\angle X(-\omega) \end{array}\right\} \Rightarrow X(-\omega) = X^*(\omega)$$

Prova:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-j\omega t)dt = A(\omega) - jB(\omega)$$

com

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(\omega t)dt \quad \textit{(par)} \quad , \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)sen(\omega t)dt \quad \textit{(ímpar)}$$

$$\mid X(-\omega) \mid = \sqrt{A^2(-\omega) + B^2(-\omega)} = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} = \mid X(\omega) \mid \quad \textit{(par)}$$

$$\angle X(-\omega) = \arctan\frac{-B(-\omega)}{A(-\omega)} = \arctan\frac{B(\omega)}{A(\omega)} = -\arctan\frac{-B(\omega)}{A(\omega)} = -\angle X(\omega) \quad \textit{(ímpar)}$$

Exemplo 1.2 (Exponencial real)

A transformada de Fourier de

$$x(t) = \exp(-at)u(t) \quad , \quad a > 0 \quad a \text{ real}$$

é dada por

$$\mathscr{F}\{\exp(-at)u(t)\} = \frac{1}{j\omega + a} = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 + a^2)}} \exp\left(-j\arctan(\omega/a)\right)$$

confirmando a Propriedade 4 (sinais reais têm módulo par e fase ímpar).

Note que $x(t) = \exp(-at)u(t)$ é descontínua em $t = 0$ e o valor da transformada inversa em $t = 0$ é $x(0) = 0.5$ (valor médio na descontinuidade), pois

$$2\pi x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{j\omega + a} d\omega = \int_{0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{-j\omega + a} + \frac{1}{j\omega + a} \Big) d\omega = \int_{0}^{+\infty} \frac{2a}{\omega^2 + a^2} d\omega =$$

$$= \frac{2}{a} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(\omega/a)^2 + 1} d\omega = 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\omega^2 + 1} d\omega = 2 \int_{0}^{+\pi/2} d\theta = \pi$$

$$\omega = \tan(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d \tan(\theta)}{\tan^2(\theta) + 1} = d\theta$$

Teorema 1 (Parseval)

Se $x(t)$ é um sinal de energia, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \qquad \textit{Energia}$$

Prova:

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega)\exp(-j\omega t)d\omega}_{2\pi x^*(t)} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-j\omega t)dt}_{X(\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega)X(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Densidade espectral de energia I

Definição 2 (Densidade espectral de energia)

A densidade espectral de um sinal de energia $x(t)$ cuja transformada é $X(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\}$ é dada por

$$\frac{1}{2\pi} \left| X(\omega) \right|^2$$

Exemplo 1.3

Retomando o Exemplo 1.2, ilustrado na Figura 2 para $a = 1$, tem-se que $x(t)$ é um sinal de energia, pois

$$\text{Energia} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2at)u(t)dt = -\frac{1}{2a}\exp(-2at)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2a}$$

Densidade espectral de energia II

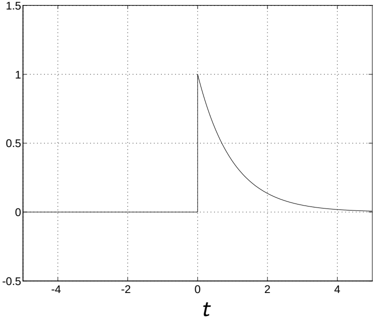

Figura: Sinal $x(t) = \exp(-t)u(t)$.

Densidade espectral de energia III

A densidade espectral de energia é dada por

$$\frac{1}{2\pi} \mid X(\omega) \mid^2 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{a^2 + \omega^2} \right)$$

ilustrada na Figura para $a = 1$.

Densidade espectral de energia IV

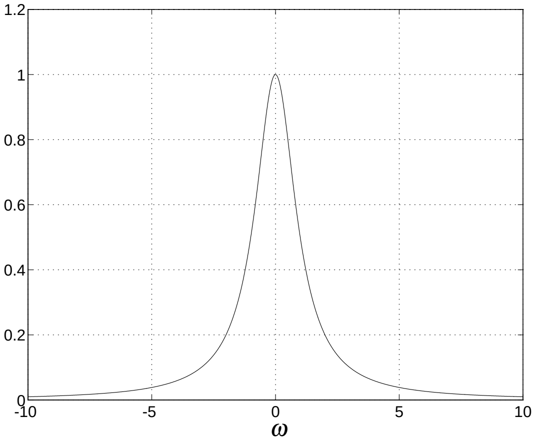

Figura: Densidade espectral de energia de $x(t) = \exp(-t)u(t)$.

O Teorema de Parseval é verificado, pois

$$\text{Energia} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{a^2+\omega^2}\right)d\omega = \frac{1}{2\pi a}\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi a}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2a}$$

Uma avaliação da distribuição da área sob a curva da Figura 3 pode ser obtida a partir do índice

$$I_k = \frac{\text{área de } -k \text{ a } +k}{\text{área total}} \quad \Rightarrow \quad I_5 = 0.87,\ I_{10} = 0.94,\ I_{40} = 0.98$$

Propriedade 5 (Reversão no tempo)

$$\mathscr{F}\{x(-t)\} = X(-\omega)$$

pois

$$\mathscr{F}\{x(-t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)\exp(-j\omega t)dt = -\int_{+\infty}^{-\infty} x(\beta)\exp(j\omega\beta)d\beta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)\exp\big(-j(-\omega)\beta\big)d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp\big(-j(-\omega)t\big)dt = X(-\omega)$$

Exemplo I

Exemplo 1.4

$$\mathscr{F}\{\exp(-at)u(t)\} = \frac{1}{j\omega + a} \ ; \ \mathrm{Re}(a) > 0 \Rightarrow \mathscr{F}\{\exp(at)u(-t)\} = \frac{1}{-j\omega + a} \ ; \ \mathrm{Re}(a) > 0$$

A Figura 4 mostra o sinal $x(t) = \exp(t)u(-t)$.

Exemplo II

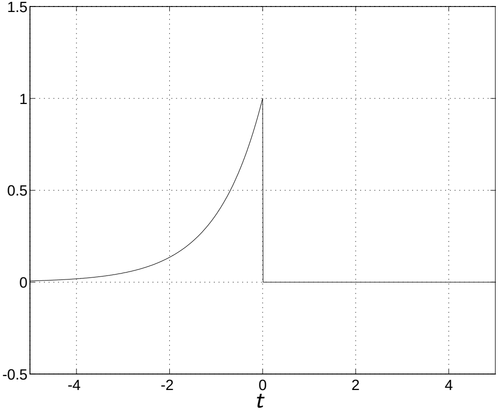

Figura: Sinal $x(t) = \exp(t)u(-t)$.

Exemplo III

A densidade espectral de energia é dada por

$$\frac{1}{2\pi} \mid X(\omega) \mid^2 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{a^2 + \omega^2} \right)$$

que é também a densidade espectral de $x(-t) = \exp(-t)u(t)$, mostrada na Figura 3.

Propriedade 6 (Função real e par)

A transformada de Fourier de um sinal real e par $x(t)$ é um sinal $X(\omega)$ real e par, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-j\omega t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(\omega t)dt - j\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)sen(\omega t)dt}_{=0}$$

Exemplo 1.5

Considere o sinal $x(t)$ dado por

$$x(t) = \exp(-a\mid t\mid) = \exp(-at)u(t) + \exp(at)u(-t) \quad , \quad a > 0$$

mostrado na figura para $a = 1$, cuja transformada de Fourier é

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega + a} + \frac{1}{-j\omega + a} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

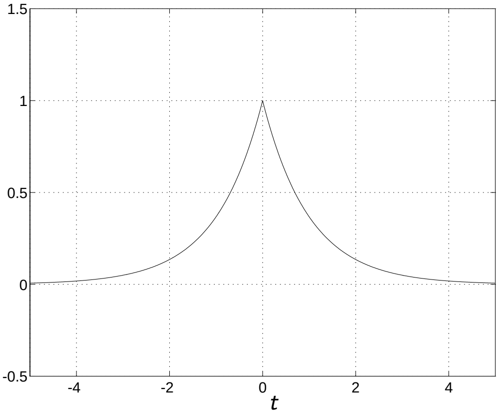

Figura: Sinal $x(t) = \exp(-|t|)$.

Note que $X(\omega)$ é uma função real e par, pois $x(t)$ é real e par.

A densidade espectral de energia, mostrada na figura para $a = 1$, é

$$\frac{1}{2\pi} \mid X(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \mid 2a/(a^2 + \omega^2)|^2$$

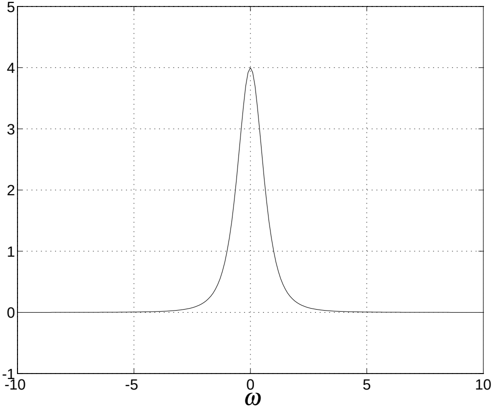

Figura: Espectro de energia do sinal $x(t) = \exp(-|t|)$.

Observe que a densidade espectral cai com ω^4, enquanto que nos exemplos 1.2 e 1.4 o decaimento ocorre com ω^2. Esse comportamento em frequência está relacionado à presença ou não de descontinuidades nos sinais.
O espalhamento em frequência do espectro pode ser avaliado pelo índice I_k, resultando neste caso em

$$I_5 = 0.99 \quad ; \quad I_{10} = 1.00$$

confirmando que a energia está mais concentrada do que nos caso dos sinais com descontinuidade.

A integral de $x(t)$ é $2/a$, o que é confirmado pelo valor de

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \frac{2}{a}$$

e a integral de $X(\omega)$ é igual a 2π, o que é confirmado por

$$x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega = 1$$

Propriedade 7 (Simetria)

$$\mathscr{F}\{x(t)\} = X(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{F}\{X(t)\} = 2\pi x(-\omega)$$

pois

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\exp(j\omega t)d\omega \quad \Rightarrow \quad 2\pi x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\beta)\exp(j\beta t)d\beta$$

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\beta)\exp(-j\omega\beta)d\beta \quad \Rightarrow$$

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\exp(-j\omega t)dt = \mathscr{F}\{X(t)\}$$

Exemplo 1.6

A transformada de Fourier de

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

é dada por

$$X(\omega) = \pi \exp(-|\omega|)$$

pois, pela Propriedade 7 (simetria), tem-se

$$\mathscr{F}\left\{\frac{1}{2}\exp(-|t|)\right\} = \frac{1}{1+\omega^2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{F}\left\{\frac{1}{1+t^2}\right\} = \pi \exp(-|\omega|)$$

Note que $x(t)$ e $X(\omega)$ são ambas funções reais e pares

Exemplo I

Exemplo 1.7

A transformada de Fourier da função gate

$$x(t) = G_T(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2)$$

mostrada na figura, é dada por

$$\mathscr{F}\{G_T(t)\} = T\mathrm{Sa}(\omega T/2) \quad , \quad \mathrm{Sa}(\omega T/2) = \frac{\mathrm{sen}(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

Exemplo II

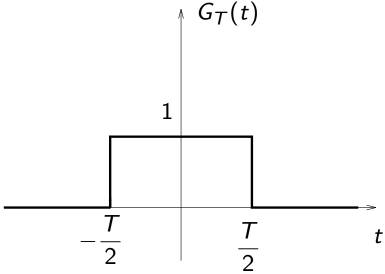

Figura: Função gate $G_T(t)$.

Exemplo III

pois

$$\mathscr{F}\{G_T(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_T(t)\exp(-j\omega t)dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \exp(-j\omega t)dt =$$

$$= \frac{-1}{j\omega}\exp(-j\omega t)\Big|_{-T/2}^{+T/2} = T\left(\frac{\text{sen}(\omega T/2)}{\omega T/2}\right) = T\text{Sa}(\omega T/2)$$

Note que o primeiro cruzamento de $\text{Sa}(\omega T/2)$ com o eixo das abscissas ocorre em $2\pi/T$. Portanto, quanto mais estreito for o pulso no tempo, mais espalhado será seu espectro em ω e vice-versa.

A função $\text{Sa}(\omega/2)$ e a densidade espectral de energia (multiplicada por 2π) são mostradas nas figuras.

Exemplo IV

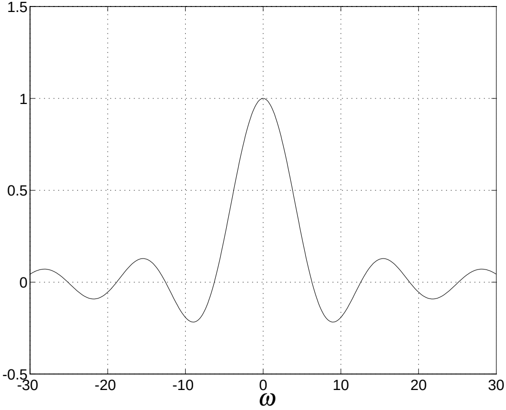

Figura: Função Sa($\omega/2$) (*sampling*).

Exemplo V

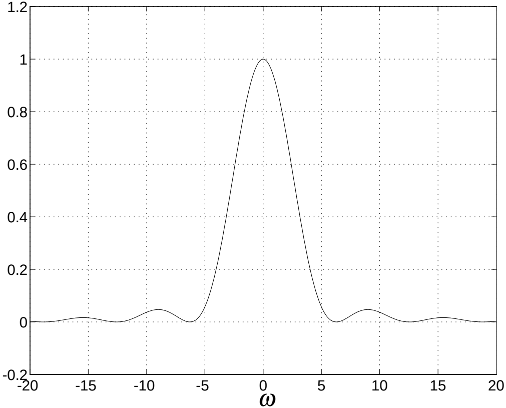

Figura: $|X(\omega)|^2 = \mathrm{Sa}^2(\omega/2)$.

Exemplo VI

Note que os índices de espalhamento em frequência do espectro, neste caso, dados por

$$I_{2\pi} = 0.90 \ ; \ I_{4\pi} = 0.95 \ ; \ I_{8\pi} = 0.97$$

são similares aos do sinal do Exemplo 1.2, que também possui descontinuidade.

Exemplo 1.8

$$\mathscr{F}\{\mathrm{Sa}(\omega_0 t/2)\} = \frac{2\pi}{\omega_0} G_{\omega_0}(\omega)$$

pois

$$\mathscr{F}\left\{\frac{1}{\alpha} G_\alpha(t)\right\} = \mathrm{Sa}(\omega\alpha/2)$$

e, pela Propriedade 7 (simetria),

$$\mathscr{F}\{\mathrm{Sa}(t\alpha/2)\} = \frac{2\pi}{\alpha} G_\alpha(-\omega)$$

Note que a transformada de Fourier da função *sampling*, que não é limitada no tempo, é uma função gate, ou seja, é limitada em frequência.

Propriedade 8 (Transformada de Fourier da função impulso)

$$\mathscr{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt = 1$$

Observe que $\delta(t)$ não é um sinal de energia e portanto o Teorema de Parseval não se aplica.

Note também que a função impulso poderia ser calculada como a transformada inversa de 1, ou seja

$$\delta(t) = \mathscr{F}^{-1}\{1\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j\omega t) d\omega$$

Definição 3 (Sinais de potência)

Um sinal $x(t)$ é de potência finita se

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}|x(t)|^2dt < +\infty$$

Por exemplo, $x_1(t) = \text{sen}(t)$ é um sinal de potência, e o sinal $x(t) = G_2(t)$ é um sinal de energia, pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt = \int_{-1}^{1}dt = 2 < +\infty$$

Exemplo 1.9

A transformada de Fourier do sinal $x(t) = 1$ é dada por

$$\mathscr{F}\{1\} = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

pela Propriedade 7 (simetria).

Exemplo I

Exemplo 1.10

A transformada de Fourier de

$$\text{sinal}(t) = \begin{cases} +1 & , \quad t > 0 \\ -1 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

é dada por

$$\mathscr{F}\{\text{sinal}(t)\} = \frac{2}{j\omega}$$

pois, escrevendo a função sinal(t) na forma

$$\text{sinal}(t) = \lim_{a\to 0^+} \big(\exp(-at)u(t) - \exp(at)u(-t)\big)$$

tem-se

$$\mathscr{F}\{\text{sinal}(t)\} = \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{a-j\omega}\right) = \frac{2}{j\omega}$$

Exemplo II

Note que a função sinal(t) possui a mesma potência média que a função $x(t) = 1$, mas as transformadas de Fourier são distintas, assim como os valores médios, 0 e 1, respectivamente.

A função sinal(t) pode ser interpretada como uma inversão de polaridade numa alimentação em corrente contínua (acionamento de uma chave).

A transformada de Fourier da função sinal(t) ilustra o ruído (clic) que se ouve nos rádios a pilha quando um interruptor da rede elétrica, próximo do rádio, é acionado.

Exemplo 1.11

A transformada de Fourier da função

$$x(t) = u(t)$$

é dada por

$$\mathscr{F}\{u(t)\} = \mathscr{F}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sinal}(t)\right\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Propriedade 9 (Deslocamento no tempo)

$$\mathscr{F}\{x(t-\tau)\} = X(\omega)\exp(-j\omega\tau)$$

pois

$$\mathscr{F}\{x(t-\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\exp(-j\omega t)dt$$

$$\mathscr{F}\{x(t-\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)\exp(-j\omega\beta)\exp(-j\omega\tau)d\beta =$$

$$\exp(-j\omega\tau)\ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)\exp(-j\omega\beta)d\beta}_{X(\omega)}$$

Exemplo 1.12

$$\mathscr{F}\{\delta(t-\tau)\} = \exp(-j\omega\tau)$$

Propriedade 10 (Deslocamento em frequência)

$$\mathscr{F}\{x(t)\exp(j\omega_0 t)\} = X(\omega-\omega_0)$$

pois

$$\mathscr{F}\{x(t)\exp(j\omega_0 t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(j\omega_0 t)\exp(-j\omega t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp\Big(-j(\omega-\omega_0)t\Big)dt = X(\omega-\omega_0)$$

Exemplo 1.13

$$\mathscr{F}\{\exp(j\omega_0 t)\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

pois, aplicando-se a Propriedade 10 (deslocamento em frequência) para $x(t) = 1$, tem-se

$$\mathscr{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega) \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}\{\exp(j\omega_0 t)\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Exemplo 1.14

$$\mathscr{F}\{\exp(-j\omega_0 t)\} = 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

Exemplo 1.15

$$\mathscr{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \mathscr{F}\left\{\frac{1}{2}\exp(j\omega_0 t) + \frac{1}{2}\exp(-j\omega_0 t)\right\} = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$\mathscr{F}\{\text{sen}(\omega_0 t)\} = \mathscr{F}\left\{\frac{1}{2j}\exp(j\omega_0 t) - \frac{1}{2j}\exp(-j\omega_0 t)\right\} = \frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_0)$$

Propriedade 11 (Transformada de Fourier de sinal periódico)

Considere o sinal periódico

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \exp(jk\omega_0 t) \quad , \quad X_k = \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \exp(-jk\omega_0 t) dt$$

A transformada de Fourier de $x(t)$ é dada pelo trem de impulsos modulado

$$X(\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

pois

$$X(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \mathscr{F}\{\exp(jk\omega_0 t)\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Exemplo:

$$\mathscr{F}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \right\} = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Propriedade 12 (Transformada de Fourier da convolução)

$$\mathscr{F}\{x(t)*y(t)\} = \mathscr{F}\{x(t)\}\mathscr{F}\{y(t)\} = X(\omega)Y(\omega)$$

pois

$$\mathscr{F}\{x(t)*y(t)\} = \mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\beta)y(\beta)d\beta\right\} =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(\beta)\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\beta)\exp(-j\omega t)dt\right)}_{X(\omega)\exp(-j\omega\beta)} d\beta$$

$$\mathscr{F}\{x(t)*y(t)\} = X(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} y(\beta)\exp(-j\omega\beta)d\beta = X(\omega)Y(\omega)$$

Exemplo 1.16

A transformada de Fourier do sinal

$$\mathrm{Tri}_{2T}(t) = (t/T+1)G_T(t+T/2) + (1-t/T)G_T(t-T/2) = \frac{1}{T}G_T(t) * G_T(t)$$

é dada por

$$\mathscr{F}\{\mathrm{Tri}_{2T}(t)\} = \frac{1}{T}\left(T\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)^2 = T\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Exemplo 1.17

A transformada de Fourier do sinal $\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)$ é dada por (usando a Propriedade 7, de simetria)

$$\mathscr{F}\left\{\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)\right\} = \frac{2\pi}{\omega_0}\mathrm{Tri}_{2\omega_0}(-\omega) = \frac{2\pi}{\omega_0}\mathrm{Tri}_{2\omega_0}(\omega)$$

Propriedade 13 (Transformada da integral)

$$\mathscr{F}\left\{\mathscr{I}_x(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\beta)d\beta\right\} = \mathscr{F}\{x(t) * u(t)\} = X(\omega)\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right)$$

Se $X(0) = 0$*, isto é, se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = 0$$

então

$$\mathscr{F}\left\{\mathscr{I}_x(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\beta)d\beta\right\} = \frac{1}{j\omega}X(\omega)$$

Exemplo I

Exemplo 1.18

A transformada de Fourier do sinal $x(t) = \text{Tri}_2(t)$ mostrado na Figura 10 pode ser obtida a partir das suas derivadas sucessivas.

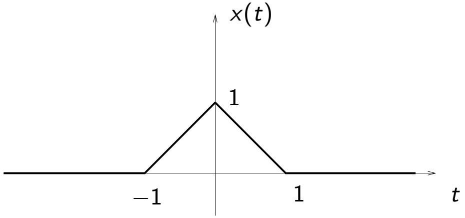

Figura: Sinal $x(t) = \text{Tri}_2(t)$.

Exemplo II

A Figura 11 mostra o sinal $x(t)$ derivado duas vezes. Observe que as áreas sob as funções $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ são nulas.

Exemplo III

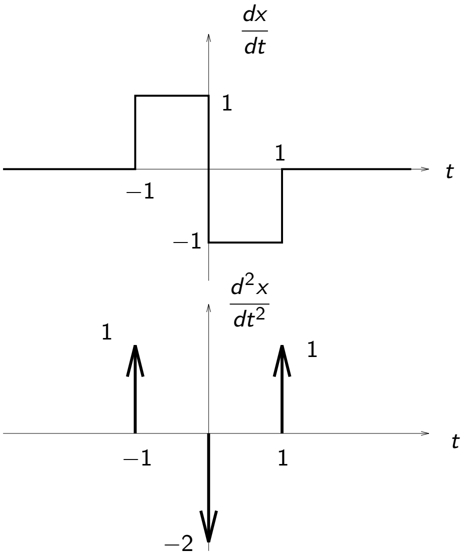

Figura: Derivadas do sinal $x(t) = \text{Tri}_2(t)$.

Propriedade 14 (Transformada da derivada)

$$\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = (j\omega)X(\omega)$$

pois

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\exp(j\omega t)d\omega \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\frac{d}{dt}\exp(j\omega t)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(j\omega)X(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

Propriedade 15 (Transformada de Fourier do produto)

$$\mathscr{F}\{x(t)y(t)\} = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\{x(t)\} * \mathscr{F}\{y(t)\} = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * Y(\omega)$$

pois

$$\mathscr{F}\{x(t)y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)\exp(-j\omega t)dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\beta)\exp(j\beta t)d\beta\right)\exp(-j\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\beta)\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-jt(\omega-\beta)dt\right)}_{X(\omega-\beta)} d\beta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\beta)X(\omega-\beta)d\beta$$

Exemplo 1.19 (Modulação)

$$\mathscr{F}\{x(t)\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * \Big(\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)\Big) =$$
$$\frac{1}{2}X(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}X(\omega+\omega_0)$$

Exemplo 1.20 (Recuperação de um sinal modulado)

Considere o sinal $y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t)$ com $X(\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi B$ e $2\pi B < \omega_0$, B real positivo.

O sinal resultante da passagem de $2y(t)\cos(\omega_0 t)$ por um filtro passa-baixas ideal de frequência de corte B é $x(t)$, pois

$$2x(t)\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t) = x(t)\big(1+\cos(2\omega_0 t)\big)$$

O filtro rejeita a parcela que está centrada em $2\omega_0$, ficando apenas o espectro de $x(t)$.

Série de Fourier a partir da Transformada de Fourier I

Propriedade 16 (Série de Fourier a partir da Transformada de Fourier)

Considere o sinal periódico

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t-kT) \quad , \quad p(t) = 0 \text{ para } |t| > T/2$$

Usando-se série exponencial de Fourier, $x(t)$ pode ser escrito como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(jk\omega_0 t) \ ; \ \ c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\exp(-jk\omega_0 t)dt$$

Como $x(t) = p(t)$ para $|t| < T/2$, tem-se

$$P(k\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\exp(-jk\omega_0 t)dt = Tc_k \quad ; \quad P(\omega) = \mathscr{F}\{p(t)\}$$

Série de Fourier a partir da Transformada de Fourier II

Os coeficientes da série trigonométrica podem ser obtidos a partir de $c_k = P(k\omega_0)/T$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \text{sen}(k\omega_0 t)\big)$$

com valor médio dado por

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)dt = \frac{1}{T}P(0)$$

Os coeficientes dos termos em cosseno são dados por

$$a_k = (c_k + c_{-k}) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt$$

$$a_k = \frac{1}{T}\big(P(k\omega_0) + P(-k\omega_0)\big) = \frac{2}{T}\ \text{Re}\ \{P(k\omega_0)\}$$

Série de Fourier a partir da Transformada de Fourier III

Os coeficientes dos termos em seno são dados por

$$b_k = j\big(c_k - c_{-k}\big) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\text{sen}(k\omega_0 t)dt$$

$$b_k = \frac{j}{T}\big(P(k\omega_0) - P(-k\omega_0)\big) = \frac{-2}{T}\ \text{Im}\,\{P(k\omega_0)\}$$

Exemplo 1.21

Considere o sinal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t-kT) \quad , \quad p(t) = \text{Tri}_T(t)$$

$$P(\omega) = \mathscr{F}\{\text{Tri}_T(t)\} = \mathscr{F}\left\{\frac{2}{T} G_{T/2}(t) * G_{T/2}(t)\right\} = \frac{T}{2}\text{Sa}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)$$

Para $T = 2$, tem-se

$$P(\omega) = \text{Sa}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$P(k\omega_0) = \text{Sa}^2\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & , \quad k = 0 \\ 0 & , \quad k \neq 0 \ \ \text{par} \\ \left(\dfrac{2}{k\pi}\right)^2 & , \quad k \ \ \text{ímpar} \end{cases}$$

$a_0 = \dfrac{1}{T}P(0) = \dfrac{1}{2}$; $a_k = \dfrac{4}{k^2\pi^2}$, k ímpar ; $a_k = 0$, k par ; $b_k = 0$ pois $P(\omega)$ é real

Propriedade 17 (Momento)

$$\mathscr{F}\{t^m x(t)\} = j^m \frac{d^m}{d\omega^m} X(\omega)$$

Exemplo 1.22

Considere

$$x(t) = \lambda \exp(-\lambda t) u(t) \ , \ \lambda > 0$$

As integrais (momentos da função $x(t)$) são

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = X(\omega)\Big|_{\omega=0} = \frac{\lambda}{j\omega+\lambda}\Big|_{\omega=0} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tx(t)dt = j\frac{d}{d\omega}X(\omega)\Big|_{\omega=0} = \frac{\lambda}{(j\omega+\lambda)^2}\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 x(t)dt = j^2\frac{d^2}{d\omega^2}X(\omega)\Big|_{\omega=0} = \frac{2\lambda}{(j\omega+\lambda)^3}\Big|_{\omega=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Definição 4 (Correlação)

A função definida pela integral

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt \quad , \quad \tau \in \mathbb{R}$$

é chamada de correlação cruzada entre os sinais $x(t)$ e $y(t)$, e a função $r_x(\tau) = r_{xx}(\tau)$ é denominada de auto-correlação de $x(t)$.

Note que a correlação $r_{xy}(0)$ é o numerador do coeficiente de projeção do sinal $x(t)$ no sinal $y(t)$ dado por

$$\frac{< x(t)y^*(t) >}{< |y(t)|^2 >}$$

Propriedade 18 (Correlação)

A função correlação têm as seguintes propriedades (relacionadas com convolução e com transformada de Fourier)

- $r_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)$
- $r_{xy}(\tau) = r^*_{yx}(-\tau)$
- $2r_x(0) > |r_x(\tau) + r_x(-\tau)|\ ,\ \tau \neq 0$
- $\mathscr{F}\{r_{xy}(\tau)\} = \mathscr{F}\{x(\tau) * y^*(-\tau)\} = X(\omega)Y^*(\omega)$
- *A transformada de Fourier da auto-correlação $r_x(\tau)$ é igual à densidade espectral de $x(t)$ (multiplicada por 2π)*

$$\mathscr{F}\{r_x(\tau)\} = |X(\omega)|^2$$