Livro (e-book): Linearidade em Sinais e Sistemas, Ivanil S. Bonatti, Amauri Lopes, Pedro L. D. Peres, Cristiano M. Agulhari,

Ed. Blucher, SP, 2015, 1ed., ISBN: 9788521208921.

Prof. Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Filtros

O filtro passa-baixas ideal de frequência de corte $\omega_0/2$, isto é, de faixa de passagem ω_0, é descrito pela função de transferência $H(s)$ dada por

$$H(s = j\omega) = G_{\omega_0}(\omega)$$

cuja resposta ao impulso é $h(t)$ dado por

$$h(t) = \frac{1}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}t\right) \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Note que trata-se de um filtro não-causal, isto é, $h(t)$ é diferente de zero para $t < 0$ e, portanto, não implementável fisicamente, pois a resposta ao impulso antecede o instante de aplicação. A não viabilidade de implementação também pode ser inferida da resposta em frequência do filtro passa-baixas, pois a atenuação das componentes do sinal de entrada superiores à frequência de corte nos filtros realizáveis é sempre finita.

A resposta ao impulso $g(t) = h(t - T)$ tem o principal lóbulo da função *Sampling* à direita de $t = 0$ e, portanto, tem menos energia para $t < 0$ e, de maneira não formal, pode-se dizer que $g(t)$ é menos não implementável que $h(t)$. Além disso, atrasos são inerentes no processamento de sinais e em telecomunicações e introduzir atrasos nos componentes faz parte das técnicas de processamento de sinal. Atraso no tempo implica em introdução de fase linear na resposta em frequência pois $\mathscr{L}\{\delta(t - T)\} = \exp(-sT)$ tem módulo 1 e fase $-\omega T$ quando $s = j\omega$.

Exemplo I

Considere o filtro passa-baixas de segunda ordem mostrado na Figura 1 cuja função de transferência é

$$H(s) = \left(\frac{1/\tau}{s+1/\tau}\right)^2 \quad , \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2}$$

A resposta ao impulso é

$$h(t) = \frac{1}{\tau^2} t \exp(-t/\tau) u(t)$$

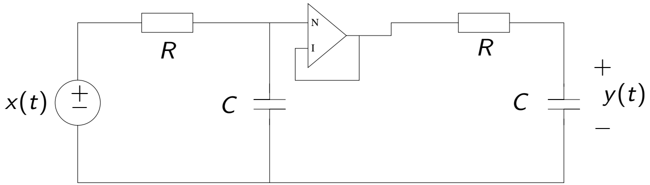


Figura: Filtro duplo RC em cascata.

Exemplo II

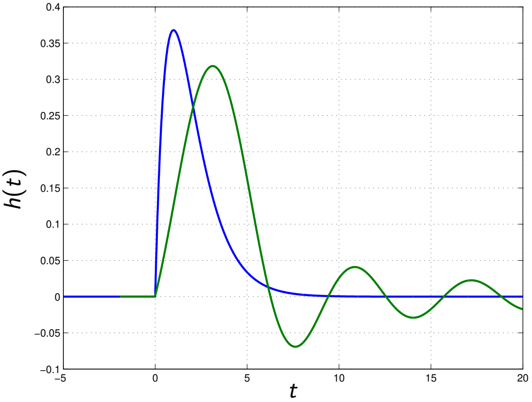


Figura: *Sampling* ceifada ($\omega_0 = 2$) e resposta ao impulso do filtro duplo *RC* para $\tau = 1$.

Exemplo III

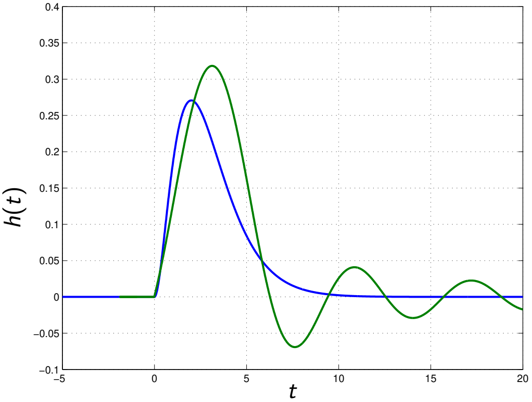


Figura: *Sampling* ceifada ($\omega_0 = 2$) e resposta ao impulso do filtro triplo *RC* para $\tau = 1$.

Exemplo IV

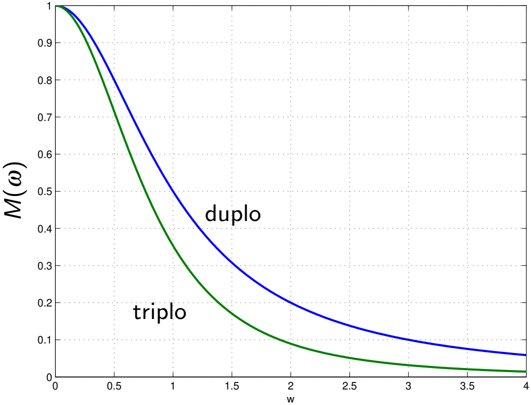


Figura: Respostas em frequência do módulo do filtro duplo *RC* e do filtro triplo *RC* ($\tau = 1$).

Filtros racionais

Propriedade 1 (Filtros racionais)

Filtros descritos por equações diferenciais a coeficientes constantes têm função de transferência racional, pois

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \;\Rightarrow\; H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Impor a condição de causalidade corresponde a definir o domínio de $H(s)$ à direita do pólo mais à direita e, além disso, impor a BIBO-estabilidade corresponde a impor que todos os pólos tenham parte real negativa e, portanto, que $s = j\omega$ pertença ao domínio da função.

Exemplo I

A resposta ao impulso $h(t)$ do filtro $H(s)$ dado por

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

é

$$h(t) = (\exp(-t) - \exp(-2t))u(t)$$

Note que trata-se de um sistema causal e BIBO-estável. De fato, esse resultado tem como pressuposto que o domínio da função $H(s)$ é a intersecção de $\text{Re}(s+1) > 0$ com $\text{Re}(s+2) > 0$, ou seja, é o semi-plano à direita do pólo mais à direita da função, isto é, -1.

Exemplo I

Existem diversas implementações de filtros racionais para aproximar o filtro passa-baixas ideal. A Figura 5 mostra um filtro passa-baixas de terceira ordem e a Figura 6 mostra um de quarta ordem composto de dois LC em cascata.

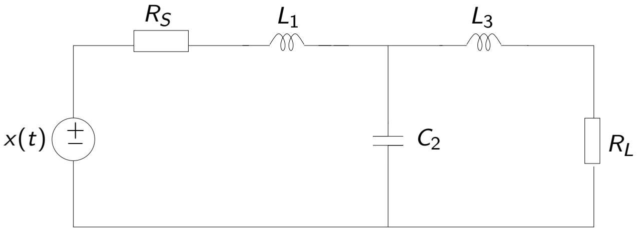


Figura: Filtro passa-baixas de terceira ordem.

Exemplo II

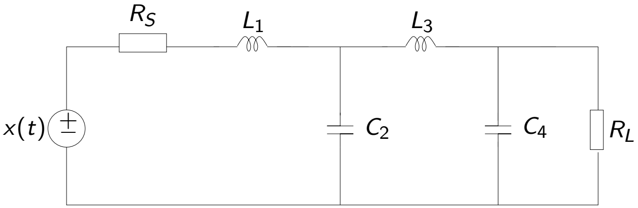


Figura: Filtro passa-baixas de quarta ordem.

De fato, para sinais de baixa frequência capacitores comportam-se aproximadamente como circuitos abertos e indutores como curto-circuitos. Para altas frequência s indutores comportam-se aproximadamente como circuitos abertos e capacitores como curto-circuitos. Nas topologias dos filtros os indutores estão em série com a fonte e a carga e os capacitores estão em paralelo, portanto os sinais de baixa frequência passam pelos filtros e os de alta frequência não passam, isto é, são filtros passa-baixas.

A Figura 7 ilustra especificações típicas de um filtro passa-baixas:

- A resposta em frequência do filtro na faixa de passagem $\omega \in [0, \omega_p]$ deve apresentar um ganho mínimo e uma variação máxima (*ripple*);
- A resposta em frequência do filtro na faixa de rejeição $\omega > \omega_r$ deve apresentar uma atenuação mínima;
- O intervalo $[\omega_p, \omega_r]$, denominado de faixa de transição, é para viabilizar a realização dos filtros. Note que no filtro passa-baixas ideal $\omega_p = \omega_r = \omega_c$;
- A frequência de corte ω_c é tipicamente definida como a frequência na qual o ganho é igual a $|H(0)|/2$.

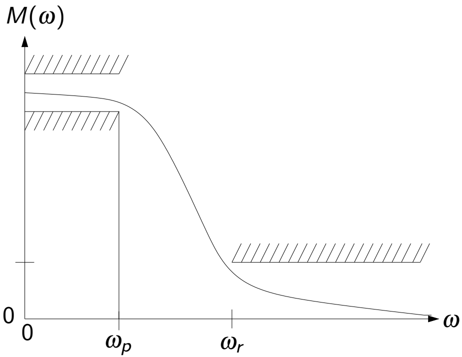


Figura: Especificação típica de um filtro passa-baixas.

Butterworth

Definição 1

O filtro passa-baixas de Butterworth de ordem $m > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ *satisfaz*

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^{2m}}$$

Butterworth

Propriedade 2 (Ganho de Butterworth)

O ganho do filtro de Butterworth apresenta as seguintes propriedades:

- *O ganho DC é* 1 *e o ganho tende a* 0 *para* $\omega \to +\infty$*;*
- *Na frequência* $\omega = \omega_c$ *o ganho é* $1/\sqrt{2}$ *do ganho DC;*
- *O ganho tende a* 1 *para* $\omega < \omega_c$ *e o ganho tende a* 0 *para* $\omega > \omega_c$ *quando* $m \to +\infty$*.*
- *A função* $|H(j\omega)|^2$ *diminui monotonicamente com o aumento de* ω*, isto é, não apresenta ondulações. Além disso, tem* $(2m-1)$ *derivadas nulas em* $\omega = 0$*, pois*

$$\frac{d|H(j\omega)|^2}{d\omega} = -\frac{2m(\omega/\omega_c)^{2m-1}}{\omega_c(1+(\omega/\omega_c)^{2m})^2}$$

- *A ordem do filtro aumenta quanto maior for a diferença entre os ganhos especificados na faixa de passagem e na faixa de rejeição e quanto mais estreita for a faixa de transição.*

Exemplo

Considere o filtro de Butterworth projetado com $\omega_c = 2\omega_p = \omega_r/2$. O quadrado do ganho em ω_p (uma oitava abaixo da frequência de corte) para o filtro de Butterworth de ordem $m = 2$ é

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{16}} = \frac{16}{17} \Rightarrow |H(j\omega)| = 0.970$$

e o quadrado do ganho em ω_r (uma oitava acima da frequência de corte) é

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_r}{\omega_c}\right)^4} = \frac{1}{17} \Rightarrow |H(j\omega)| = 0.242$$

Exemplo

O valor do quadrado do ganho em ω_p para o filtro de Butterworth de ordem $m = 3$ é

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^6} = \frac{64}{65} \Rightarrow |H(j\omega)| = 0.992$$

e o quadrado do ganho em ω_r é

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_r}{\omega_c}\right)^6} = \frac{1}{65} \Rightarrow |H(j\omega)| = 0.124$$

Note que a atenuação ao final da faixa de passagem diminui e a diferença da atenuação entre a faixa de passagem e a faixa de rejeição aumenta com o aumento da ordem do filtro.

Exemplo

Considere as seguintes especificações para um filtro de Butterworth:

- Ganho DC igual a 1;
- frequência de corte $\omega_c = 1000$;
- Faixa de transição: $\omega_p = 250$ e $\omega_r = 2000$;
- Variação do ganho igual a $|H(\omega)|$ na faixa de passagem menor que $\Delta = 0.01$;
- Atenuação mínima na faixa de rejeição igual a $a = 100$.

Exemplo

Portanto,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2m}}} < 1-\Delta \Rightarrow m > \frac{1}{2}\frac{\log((1-\Delta)^{-2}-1)}{\log(\omega_p/\omega_c)} \Rightarrow m > 1.41$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_r}{\omega_c}\right)^{2m}}} < \frac{1}{a} \Rightarrow m > \frac{1}{2}\frac{\log(a^2-1)}{\log(\omega_r/\omega_c)} \Rightarrow m > 6.64$$

ou seja, $m=7$ satisfaz as especificações.
Considere as seguintes alterações na especificação e as conseqüentes mudanças na ordem do filtro:

- $a=100, \quad \omega_r = 1500 \ \Rightarrow \ m > 11.36;$
- $a=1000, \quad \omega_r = 2000 \ \Rightarrow \ m > 9.97.$

Tais alterações confirmam algumas das propriedades enunciadas do filtro de Butterworth.

Função de transferência do filtro de Butterworth I

Considerando que a resposta ao impulso do filtro de Butterworth é real ($h(t) \in \mathbb{R}$), a função $|H(j\omega)|^2$ pode ser escrita em termos da função de transferência $H(s)$ como

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H^*(j\omega) = H(j\omega)H(-j\omega) = H(s)H(-s)\Big|_{s=j\omega}$$

Definindo $G(s)$ por

$$G(s) = H(s)H(-s) = \frac{1}{1+(-1)^m\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{2m}}$$

tem-se que os pólos $p_k = \omega_c\lambda_k$ da função $G(s)$ são as raízes da equação

$$(-1)^m\lambda^{2m} + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^{2m} = (-1)^{m-1} = \exp(j(m+2k-1)\pi)$$

dadas por

$$\lambda_k = \exp\left(j\frac{m+2k-1}{2m}\pi\right) \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, 2m$$

Note que os pólos de $G(s)$ estão uniformemente distribuídos na circunferência de raio ω_c no plano complexo.

Função de transferência do filtro de Butterworth II

Considerando que o filtro de Butterworth é um sistema causal e BIBO-estável, os pólos de $H(s)$ devem ter parte real negativa. Assim, k deve satisfazer as restrições

$$j\frac{2k+m-1}{2m}\pi > j\frac{\pi}{2} \quad , \quad j\frac{2k+m-1}{2m}\pi < j\frac{3\pi}{2}$$

Portanto,

$$k > \frac{1}{2} \quad , \quad k < m + \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; k = 1, \ldots, m$$

Dessa forma, os pólos de $H(s)$ (parte real negativa) são

$$p_k = \omega_c \exp\left(\frac{j(2k+m-1)\pi}{2m}\right) \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, m \;\Rightarrow\; H(s) = \prod_{k=1}^{m} \frac{\omega_c}{s - p_k} \Rightarrow H(0) = 1$$

A expressão polinomial do denominador da função $H(s)$ satisfaz

$$D(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \lambda^k \quad , \quad \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} = \frac{\cos((k-1)\pi/2m)}{\mathrm{sen}(k\pi/2m)},$$

$$\alpha_k = \alpha_{m-k} \quad , \quad k = 1, \ldots, m \quad , \quad \alpha_0 = \alpha_m = 1$$

Função de transferência do filtro de Butterworth III

sendo

$$H(s) = \frac{1}{D(\lambda)} \quad , \quad \lambda = \frac{s}{\omega_c}$$

Os polinômios $D(\lambda)$ de primeira, segunda, terceira e quarta ordem são

$$\lambda + 1 \quad , \quad \lambda^2 + \sqrt{2}\lambda + 1 \quad , \quad \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 \quad , \quad \lambda^4 + 2.613\lambda^3 + 3.414\lambda^2 + 2.613\lambda + 1$$

Note que os polinômios $D(\lambda)$ são simétricos, isto é,

$$D(\lambda) = \lambda^m D(1/\lambda)$$

Função de transferência do filtro de Butterworth IV

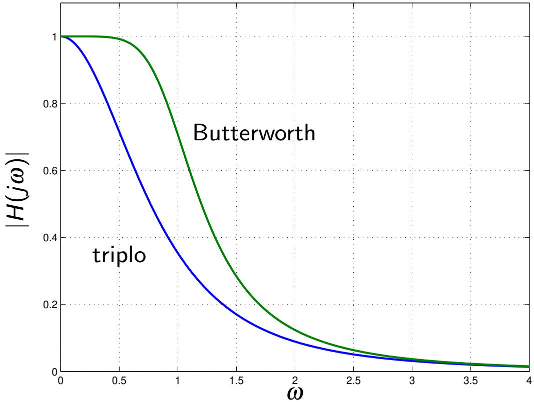


Figura: Módulo da resposta em frequência do filtro triplo RC (com $\tau = 1$) e do filtro de Butterworth de terceira ordem com $\omega_c = 1$.

Função de transferência do filtro de Butterworth V

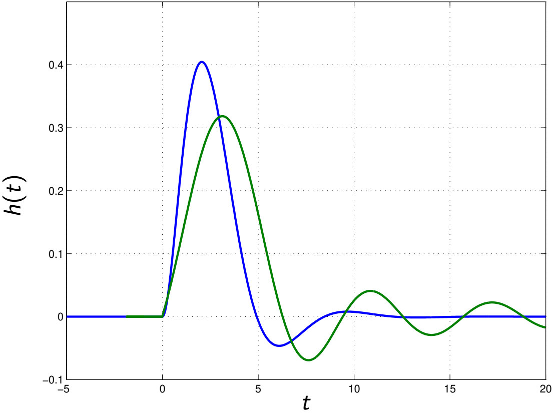


Figura: *Sampling* ceifada ($\omega_0 = 2$) e resposta ao impulso do filtro de Butterworth de terceira ordem com $\omega_c = 1$.

Exemplo I

O filtro mostrado na Figura 10 é uma realização do filtro de Butterworth de segunda ordem ($m = 2$).

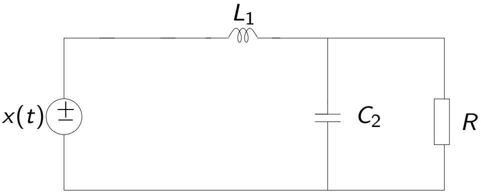


Figura: Filtro passa-baixas de segunda ordem.

Exemplo II

A função de transferência deste filtro é dada por

$$H(s) = \frac{1}{L_1 C_2 s^2 + \frac{L_1}{R} s + 1} = \frac{1}{\lambda^2 + \lambda \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} + 1}$$

sendo $\lambda = s/\omega_c$ com ω_c dado por

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}$$

Para que o filtro seja um filtro de Butterworth (de ordem $m = 2$), $H(s)$ deve satisfazer a condição

$$H(s) = \frac{1}{D(\lambda)} \quad , \quad D(\lambda) = \lambda^2 + \sqrt{2}\lambda + 1$$

e, portanto,

$$\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{L_1}{C_2} = 2R^2$$

Exemplo III

Assim os parâmetros L_1 e C_2 do filtro de Butterworth ficam definidos uma vez estabelecidos o valor da carga R e da frequência de corte ω_c.
Os filtros mostrados nas figuras anteriores são exemplos de realizações dos filtros de Butterworth de terceira e quarta ordem respectivamente quando os correspondentes polinômios $D(\lambda)$ forem devidamente ajustados aos polinômios de Butterworth.

Chebyshev

Definição 2

O filtro passa-baixas de Chebyshev de ordem $m > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, satisfaz

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 c_m^2(\omega/\omega_c)}$$

sendo $c_m(\beta)$ o polinômio real de ordem m denominado de polinômio de Chebyshev. O parâmetro $\varepsilon > 0$ serve para controlar a oscilação do ganho na faixa de passagem e, em geral, $\varepsilon \in (0,1)$.

Chebyshev

Propriedade 3 (Chebyshev)

Os polinômios de Chebyshev satisfazem a equação a diferenças

$$c_{m+1}(\beta) = 2\beta c_m(\beta) - c_{m-1}(\beta) \quad , \quad c_0(\beta) = 1 \quad , \quad c_1(\beta) = \beta$$

Note que, para cada valor do parâmetro β, trata-se de uma equação a diferenças linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Note também que os coeficientes dos polinômios em β são números inteiros e que o coeficiente de β^m é 2^{m-1}, para $m > 0$.

Os polinômios de Chebyshev de ordem zero a ordem dez, organizados em vetor coluna, são mostrados a seguir como resultado de um produto matricial. Note que os termos da anti-diagonal principal são potências de 2.

Chebyshev

$$c(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & -20 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & -48 & 0 & 18 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 64 & 0 & -112 & 0 & 56 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 128 & 0 & -256 & 0 & 160 & 0 & -32 & 0 & 1 \\ 0 & 256 & 0 & -576 & 0 & 432 & 0 & -120 & 0 & 9 & 0 \\ 512 & 0 & -1280 & 0 & 1120 & 0 & -400 & 0 & 50 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^{10} \\ \beta^9 \\ \beta^8 \\ \beta^7 \\ \beta^6 \\ \beta^5 \\ \beta^4 \\ \beta^3 \\ \beta^2 \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}$$

Polinômios de Chebyshev I

Propriedade 4 (Polinômios de Chebyshev)

Os polinômios de Chebyshev $c_m(\beta)$ satisfazem as seguintes propriedades:

- $$c_m(\beta) = \cos(m\cos^{-1}(\beta))$$

  pois, $(\beta > 1 \;\Rightarrow\; z \in \mathbb{C})$

  $$c_m = \cos(mz) \quad , \quad \beta = \cos(z) \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

  $$\begin{aligned} c_m = \cos((m-1)z+z) &= \cos((m-1)z)\cos(z) - \text{sen}((m-1)z)\text{sen}(z) \\ &= \beta c_{m-1} - \frac{1}{2}\cos((m-1)z-z) + \frac{1}{2}\cos((m-1)z+z) \\ &= \beta c_{m-1} - \frac{1}{2}c_{m-2} + \frac{1}{2}c_m \Rightarrow c_m = 2\beta c_{m-1} - c_{m-2} \end{aligned}$$

  $$0 \leq \beta \leq 1 \;\Rightarrow\; 0 \leq z \leq \pi/2 \;\Rightarrow\; -1 \leq c_m \leq 1$$

  isto é, o polinômio $c_m(\beta)$ oscila entre os valores -1 e 1 para $m > 1$.

Polinômios de Chebyshev II

- É possível mostrar que o polinômio de Chebyshev $c_m(\beta)$ satisfaz

$$c_m(\beta) = \cosh(m \cosh^{-1}(\beta))$$

  Portanto para $\beta > 1$, o polinômio cresce monotonicamente com β.

- $c_m(\beta)$ é uma função par para m par, isto é,

$$c_m(-\beta) = c_m(\beta) \quad , \quad m \text{ par}$$

- $c_m(\beta)$ é uma função ímpar para m ímpar, isto é,

$$c_m(-\beta) = -c_m(\beta) \quad , \quad m \text{ ímpar}$$

- $$c_m^2(0) = 0 \quad , \quad m \text{ ímpar} \quad ; \quad c_m^2(0) = 1 \quad , \quad m \text{ par} \quad ; \quad c_m^2(1) = 1$$

Chebyshev

Propriedade 5 (Chebyshev)

A oscilação da função $|H(j\omega)|^2$ *é limitada na faixa de passagem por uma crista e um vale, dados por*

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2} \leq |H(j\omega)|^2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon^2}} \leq |H(j\omega)| \leq 1$$

Note que quanto maior ε *maior é o ripple. Na frequência de corte* $\omega = \omega_c$ *o valor do ganho é o valor do vale e na frequência* $\omega = 0$ *o valor do ganho é o valor da crista para m ímpar e é o valor do vale para m par. Além disso, o ganho tem m cristas no intervalo* $|\omega| < \omega_c$.

Note que na frequência de corte ω_c *o ganho do filtro de Chebyshev é*

$$|H(j\omega_c)| = \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon^2}} \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad 0 < \varepsilon < 1$$

Chebyshev

O filtro de Butterworth é plano na faixa de passagem e é monotonicamente decrescente fora da faixa de passagem. Para se conseguir uma atenuação significativa na faixa de rejeição em geral necessita-se de um filtro de ordem alta.

O filtro de Chebyshev tem um *ripple* controlável na faixa de passagem e apresenta significativa atenuação na faixa de rejeição com ordens não muito elevadas.

Exemplo – Chebyshev

Considere as mesmas especificações para o filtro utilizadas no Exemplo de filtro de Butterworth.

- Ganho DC igual a 1;
- frequência de corte $\omega_c = 1000$;
- Faixa de transição: $\omega_p = 250$ e $\omega_r = 2000$;
- Variação do ganho igual a $|H(j\omega)|$ na faixa de passagem menor que $\Delta = 0.01$;
- Atenuação mínima na faixa de rejeição igual a $a = 100$.

Para atender à especificação de variação máxima de ganho na faixa de passagem, é necessário que

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \geq 1 - \Delta \Rightarrow \varepsilon \leq 0.14$$

Para atender à especificação de mínima atenuação na faixa de rejeição, deve-se ter

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 c_m^2\left(\frac{\omega_r}{\omega_c}\right)}} < \frac{1}{a} \Rightarrow c_m(2) > 714 \Rightarrow m \geq 6$$

Note que $c_5(2) = 362$, $c_6(2) = 1351$, $c_7(2) = 5042$ e $c_8(2) = 18817$.

Exemplo – Chebyshev

Considere as seguintes mudanças na especificação e as conseqüentes alterações na ordem do filtro:

- $a = 100, \quad \omega_r = 1500 \;\Rightarrow\; m \geq 8;$
- $a = 1000, \quad \omega_r = 2000 \;\Rightarrow\; m \geq 8.$

Note que a ordem do filtro de Chebyshev para atender as mesmas especificações é menor ou igual que a ordem do filtro de Butterworth.

Função de transferência do filtro de Chebyshev I

Função de transferência do filtro de Chebyshev II

Propriedade 6 (Função de transferência do filtro de Chebyshev)

Considerando que a resposta ao impulso do filtro de Chebyshev é real ($h(t) \in \mathbb{R}$), a função $|H(j\omega)|^2$ pode ser escrita em termos da função de transferência $H(s)$ como

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H^*(j\omega) = H(j\omega)H(-j\omega) = H(s)H(-s)\big|_{s=j\omega}$$

Definindo $G(s)$ por

$$G(s) = H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 c_m^2(s/(j\omega_c))}$$

e fazendo $\lambda = s/\omega_c$, tem-se

$$G(\lambda) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 c_m^2(-j\lambda)} = H(\lambda)H(-\lambda) \quad , \quad H(\lambda) = \frac{1}{\varepsilon 2^{m-1} D(\lambda)}$$

com $D(\lambda)$ dado por

$$D(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \lambda^k$$

Função de transferência do filtro de Chebyshev III

Determinar $H(s)$ implica em obter os α_k, o que é em geral numericamente complexo. A estratégia nesse caso será obter explicitamente a expressão das raízes de $D(\lambda)$ e, posteriormente, os coeficientes a partir das raízes. O coeficiente de normalização entre as funções $H(\lambda)$ e $D(\lambda)$ no caso de Chebyshev é para produzir o coeficiente de maior grau de $D(\lambda)$ igual a 1, isto é, tornar $D(\lambda)$ um polinômio mônico pois, para $\omega \gg \omega_c$ tem-se

$$|H(j\beta)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 c_m^2(\omega/\omega_c)} \approx \frac{1}{\varepsilon^2 2^{m-2}\beta^{2m}},$$

$$|H(j\beta)|^2 = \left|\frac{1}{\varepsilon 2^{m-1} D(j\beta)}\right|^2 \approx \frac{1}{\varepsilon^2 2^{m-2}\alpha_m^2\beta^{2m}} \Rightarrow \alpha_m = 1$$

É possível mostrar que os pólos de $H(\lambda)$, isto é, as raízes de $D(\lambda)$, podem ser obtidos a partir dos pólos do filtro de Butterworth de mesma ordem da seguinte forma:

- A parte real dos pólos de $H(\lambda)$ é $\sinh(\gamma)$ vezes a parte real dos pólos do filtro de Butterworth;

Função de transferência do filtro de Chebyshev IV

- A parte imaginária dos pólos de $H(\lambda)$ é $\cosh(\gamma)$ vezes a parte imaginária dos pólos do filtro de Butterworth, sendo

$$\gamma = \frac{1}{m}\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

- Os pólos de Butterworth são

$$\exp\left(j\frac{m+2k-1}{2m}\pi\right) = -\text{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m}\right) + j\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m}\right) \quad , \quad k = 1,2,\ldots,m$$

- Portanto, os pólos λ_k são

$$\lambda_k = -\sinh(\gamma)\text{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m}\right) + j\cosh(\gamma)\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m}\right) \quad , \quad k = 1,2,\ldots,m$$

Função de transferência do filtro de Chebyshev V

Como conclusão, os pólos de $G(\lambda) = H(\lambda)H(-\lambda)$ estão uniformemente distribuídos na elipse com centro em zero, semi-eixo maior igual a $\cosh(\gamma)$ e semi-eixo menor igual a $\sinh(\gamma)$. Note que a parte real de λ_k é negativa, pois $\sinh(\gamma) > 0$ e o ângulo $(2k-1)\pi/(2m)$ está entre 0 e $\pi/2$.

As figuras mostram o módulo da resposta em frequência e a resposta ao impulso do filtro de Chebyshev de terceira ordem com frequência de corte $\omega_c = 1$ e *ripple* $\varepsilon = 0.51$ (obtido com o comando `[num,den]=cheby1(3,0.51,1,'s')` do Matlab, comparados com a resposta em frequência do filtro de Butterworth de terceira ordem e com a *Sampling* ceifada ($\omega_0 = 2$).

Função de transferência do filtro de Chebyshev VI

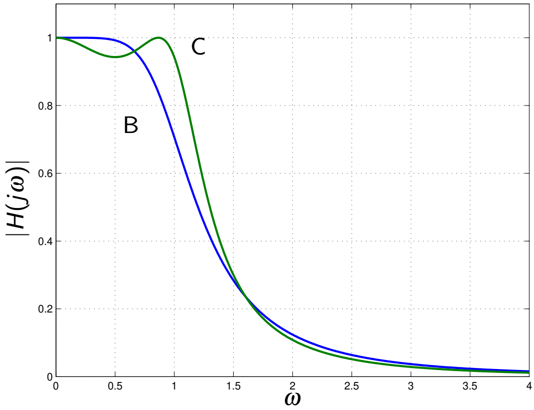


Figura: Módulo da resposta em frequência do filtro de Butterworth (B) e do filtro de Chebyshev (C) de terceira ordem.

Função de transferência do filtro de Chebyshev VII

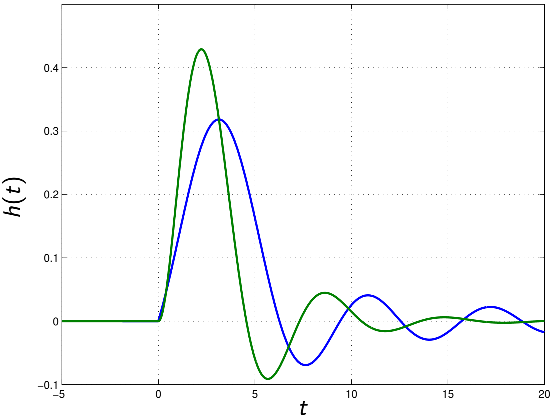


Figura: *Sampling* ceifada ($\omega_0 = 2$) e resposta ao impulso do filtro de Chebyshev de terceira ordem.

Exemplo I

Considere o filtro mostrado anteriormente, cuja função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{1}{L_1 C_2 s^2 + \dfrac{L_1}{R} s + 1}$$

As raízes do polinômio de Butterworth de segunda ordem $(m = 2)$ $(D_b(\lambda) = \lambda^2 + \sqrt{2}\lambda + 1)$ são

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Para $\varepsilon = 0.15$ (*ripple* de 11%), tem-se

$$\gamma = \frac{1}{m}\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 1.298 \quad , \quad \cosh(\gamma) = 1.967 \quad , \quad \sinh(\gamma) = 1.694$$

As raízes do polinômio de Chebyshev de segunda ordem $D_c(\lambda)$ são dadas por

$$\lambda_1 = -1.198 + j1.391 \quad , \quad \lambda_2 = -1.198 - j1.391$$

Exemplo II

Note que a parte real dos λ é o produto da parte real das raízes do polinômio de Butterworth por $\sinh(\gamma)$ e a parte imaginária dos λ é o produto da parte imaginária das raízes de Butterworth por $\cosh(\gamma)$.

A função de transferência do filtro de Chebyshev é

$$H_c(s) = \frac{1}{\varepsilon 2^{m-1} D_c(\lambda)} = \frac{1}{\varepsilon 2^{m-1}(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)} = \frac{1}{0.3\lambda^2 + 0.7188\lambda + 1}$$

e, portanto,

$$H_c(s) = \frac{1}{0.3\left(\dfrac{s}{\omega_c}\right)^2 + 0.7188\dfrac{s}{\omega_c} + 1} \quad , \quad H(s) = \frac{1}{L_1 C_2 s^2 + \dfrac{L_1}{R}s + 1}$$

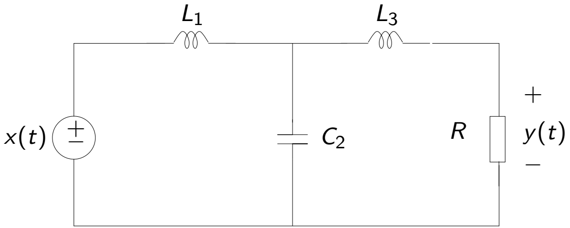
O filtro é um filtro de Chebyshev se

$$L_1 C_2 = \frac{0.3}{\omega_c^2} \quad , \quad L_1 = \frac{0.7188R}{\omega_c}$$

Exercicío 1

Determine L_1 e C_2 e L_3 para que o filtro mostrado na figura abaixo seja um filtro de Butterworth de terceira ordem, isto é, satisfaça a função de transferência

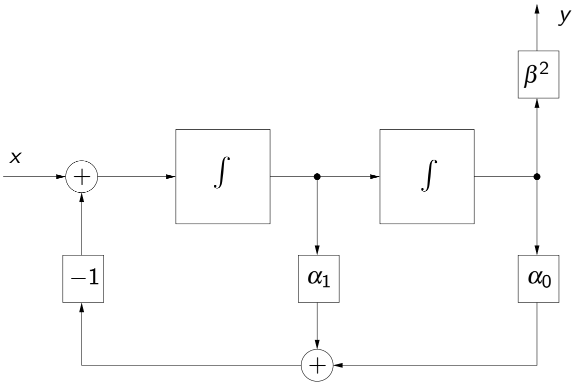
$$H(s) = \frac{1}{D(\lambda)} \quad , \quad D(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 \quad , \quad \lambda = \frac{s}{\omega_c} \quad , \quad R \text{ e } \omega_c \text{ dados}$$



Exercicío 2

Determine α_0, α_1 e β para que o sistema abaixo seja um filtro de Butterworth de segunda ordem, isto é, satisfaça a função de transferência

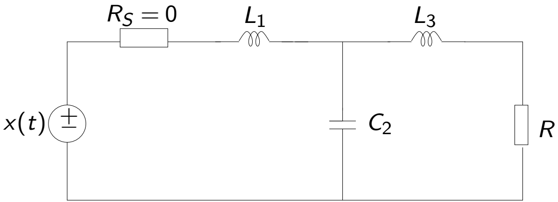
$$H(s) = \frac{1}{D(\lambda)} \quad , \quad D(\lambda) = \lambda^2 + \sqrt{2}\lambda + 1 \quad , \quad \lambda = \frac{s}{\omega_c} \quad , \quad \omega_c \text{ dado}$$



Exercicío 3

a) Determine os valores dos indutores e capacitores para que o filtro mostrado na figura abaixo seja um filtro de Butterworth de terceira ordem com $\omega_c = 1$ M rad/s e $R = 1$ kΩ.

b) Determine os valores dos indutores e capacitores para que o filtro mostrado na figura abaixo seja um filtro de Chebyshev de terceira ordem com $\omega_c = 1$ M rad/s, $R = 1$ kΩ e $\varepsilon = 0.1$.



Soluções

Exercício 1

$$L_1 = \frac{3R}{2\omega_c}, \quad C_2 = \frac{4}{3R\omega_c}, \quad L_3 = \frac{R}{2\omega_c}$$

Exercício 2

$$\alpha_0 = \omega_c^2, \quad \alpha_1 = \sqrt{2}\omega_c, \quad \beta = \omega_c$$

Exercício 3: a)

$$L_1 = 1.5 \text{ mH}, \quad C_2 = \frac{4}{3} \text{ nF}, \quad L_3 = 0.5 \text{ mH}$$

Exercício 3: b)

$$L_1 \approx 0.977 \text{ mH}, \quad C_2 = 0.961 \text{ nF}, \quad L_3 = 0.426 \text{ mH}$$