

Livro (e-book): Linearidade em Sinais e Sistemas,
Ivanil S. Bonatti, Amauri Lopes, Pedro L. D. Peres,
Cristiano M. Agulhari,

Ed. Blucher, SP, 2015, 1ed., ISBN: 9788521208921.

Prof. Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas



Resolução de Equações Diferenciais por Transformada de Laplace I

Equações diferenciais lineares a coeficientes constantes podem ser resolvidas, para $t \geq 0$, **pela transformada de Laplace**. De fato, pela chamada transformada unilateral de Laplace.

Exemplo 1.1 (Primeira ordem)

Considere a equação diferencial

$$\dot{y} + y = 0 \quad , \quad y(0) = 1$$

Portanto

$$\frac{dy}{y} = -dt \quad \Rightarrow \quad y(t) = y(0)\exp(-t) = \exp(-t)$$

Note que a transformada de Laplace de $y(t)$ não é finita para nenhum s e, portanto, a transformada de Laplace não seria um instrumento útil para a resolução de equações diferenciais, mesmo as muito simples.



Resolução de Equações Diferenciais por Transformada de Laplace II

Essa dificuldade pode ser superada considerando-se que apenas os valores de $y(t)$ para $t \geq 0$ são de interesse, uma vez que a condição inicial é conhecida.

A função

$$y(t) = \exp(-t)u(t)$$

tem transformada de Laplace e coincide com a solução para $t > 0$.

Considere a classe de sinais à direita do zero, isto é, $x(t)$ tais que $x(t) = 0$, $t < 0$, podendo ou não apresentar descontinuidade em $t = 0$. Por exemplo, os sinais $\delta(t)$, $u(t)$ e $\exp(-t)u(t)$ pertencem a esta classe de sinais.

Em sinais contínuos, $x(0^-) = x(0) = x(0^+)$ e em sinais descontínuos, $x(0^-) = x(0) \neq x(0^+)$.

Por simplicidade, o limite à esquerda $x(0^-)$ será denotado $x(0)$, e o limite à direita por $x(0^+)$.

Exemplo – Descontinuidade finita

Exemplo 1.2 (Descontinuidade finita)

$$x_1(t) = \exp(-t)u(t) \quad , \quad x_1(0) = 0$$

Em $t = 0$, $x_1(t)$ tem descontinuidade finita, pois $x_1(0^+) = 1$.

A função

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^t x_1(\beta) d\beta = (1 - \exp(-t))u(t)$$

é contínua e pertence à classe de funções à direita.

$$\dot{y}_1(t) = \exp(-t)u(t) + (1 - \exp(-t))\delta(t) = \exp(-t)u(t) = x_1(t)$$

Exemplo – Descontinuidade infinita

Exemplo 1.3 (Descontinuidade infinita)

$$x_2(t) = \exp(-t)u(t) + 3\delta(t) \quad , \quad x_2(0) = 0$$

Em $t = 0$, $x_2(t)$ tem descontinuidade infinita.

A função

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^t x_2(\beta) d\beta = (4 - \exp(-t))u(t)$$

não é contínua, pois $y_2(0) = 0$ e $y_2(0^+) = 3$ (descontinuidade finita). Também pertence à classe de funções à direita.

$$\dot{y}_2(t) = \exp(-t)u(t) + (4 - \exp(-t))\delta(t) = \exp(-t)u(t) + 3\delta(t) = x_2(t)$$

Transformada unilateral de Laplace I

Definição 1 (Transformada unilateral de Laplace)

Para a classe de funções à direita do zero, a transformada de Laplace é dada por

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-st) dt = \int_0^{+\infty} x(t) \exp(-st) dt$$

e é denominada transformada unilateral de Laplace.

Note que

$$\mathcal{L}_{uni}\{\delta(t)\} = \mathcal{L}_{bi}\{\delta(t)\} = 1$$

para as transformadas bilateral e unilateral, pois a integral que define a transformada unilateral de Laplace inicia-se em $0 = 0^-$.

Note ainda que

$$\mathcal{L}_{uni}\{1\} = \mathcal{L}_{bi}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \text{ Re}(s) > 0$$

Transformada unilateral de Laplace II

No caso da transformada Z, não foi necessária a definição de transformada unilateral, pois não há ambigüidade no cálculo da transformada da função impulso, ou seja,

$$\delta[n]u[n] = \delta[n]$$

No caso contínuo, a função $\delta(t)u(t)$ não está definida (descontinuidade de $u(t)$ em $t = 0$).

O símbolo \mathcal{L} é usado indistintamente para as transformadas unilateral e bilateral de Laplace.

Transformada de Laplace da derivada

Propriedade 1 (Transformada de Laplace da derivada)

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0) \quad , \quad s \in \Omega_x$$

Prova:

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{dt} \exp(-st) dt = \int_0^{+\infty} \exp(-st) dx$$

Integrando por partes:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = x(t)\exp(-st)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x(t)(-s)\exp(-st) dt$$

Como $\mathcal{L}\{x(t)\}$ é finita para $s \in \Omega_x$, tem-se $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)\exp(-st) = 0$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s \underbrace{\int_0^{+\infty} x(t)\exp(-st) dt}_{X(s)} - x(0) = sX(s) - x(0)$$

O domínio de $\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\}$ é no mínimo igual a Ω_x .

Transformada de Laplace das derivadas

Propriedade 2 (Transformada de Laplace das derivadas)

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - \dot{x}(0)$$

pois

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} &= \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0) = s\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} - \dot{x}(0) \\ &= s^2 \mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - \dot{x}(0) \end{aligned}$$

Genericamente:

$$\mathcal{L}\left\{x^{(m)}(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right\} = s^m \mathcal{L}\{x(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} x^{(k)}(0)$$

Exemplo – Sistema autônomo de primeira ordem

Exemplo 1.4 (Sistema autônomo de primeira ordem)

Considere a equação diferencial

$$\dot{y} + ay = 0 \quad , \quad y(0)$$

Aplicando Laplace, tem-se

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{y(0)}{s + a}$$

cuja transformada inversa é

$$y(t) = y(0)\exp(-at)u(t)$$

Note que esse exemplo modela um circuito RC autônomo, sendo $y(t)$ a tensão no capacitor e $a = 1/(RC)$.

Exemplo – Resposta ao impulso do circuito RC I**Exemplo 1.5** (Resposta ao impulso do circuito RC)

Considere o circuito RC descrito na Figura 1, com $\tau = RC$, cuja equação diferencial é dada por

$$RC\dot{y} + y = x$$

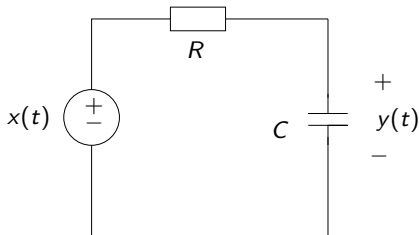


Figura: Circuito RC .

Exemplo – Resposta ao impulso do circuito RC II

A resposta ao impulso pressupõe condições iniciais nulas. Para $x(t) = \delta(t)$, tem-se $X(s) = 1$ e, nesse caso, a saída $Y(s)$ é igual a $H(s)$ (função de transferência do circuito).

A função de transferência e a resposta ao impulso são dados por

$$H(s) = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau} \Rightarrow h(t) = \frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau)u(t)$$

Note que, neste caso, a resposta ao impulso corresponde à solução do circuito autônomo com a condição inicial $y(0) = 1/\tau$.

A função de transferência da tensão medida no resistor e a correspondente resposta ao impulso são dadas por

$$H_R(s) = \frac{s}{s + 1/\tau} = 1 - \frac{1/\tau}{s + 1/\tau} \Rightarrow h_R(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau)u(t)$$

Exemplo – Resposta ao impulso do circuito *RC* III

Observe que a resposta ao impulso pode conter impulsos, associados ao fato do grau do denominador ser igual ao grau do numerador na função de transferência.

A transformada de Laplace também pode ser utilizada para fornecer valores iniciais e finais das soluções de equações diferenciais, por meio das propriedades do valor inicial e do valor final.

Valor inicial I

Propriedade 3 (Valor inicial)

Para $X(s)$ tal que $\Omega_x = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > a\}$ com a real, e $x(0^+) - x(0)$ finito:

$$x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s)$$

Obs.: $s \rightarrow +\infty$ deve ser entendido como $s = \sigma + j\omega$, com ω qualquer e $\sigma \rightarrow +\infty$.

pois

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= \mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{dt} \exp(-st) dt \\ &= \int_0^{0^+} \frac{dx}{dt} \exp(-st) dt + \int_{0^+}^{+\infty} \frac{dx}{dt} \exp(-st) dt \end{aligned}$$

Valor inicial II

$$sX(s) - x(0) = \int_0^{0^+} \frac{dx}{dt} dt + \int_{0^+}^{+\infty} \frac{dx}{dt} \exp(-st) dt = x(0^+) - x(0) + \int_{0^+}^{+\infty} \frac{dx}{dt} \exp(-st) dt$$

Para $s \rightarrow +\infty$, a integral $\int_{0^+}^{+\infty} \frac{dx}{dt} \exp(-st) dt$ vai a zero devido à existência da transformada da derivada. Portanto,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) - x(0) = x(0^+) - x(0) \quad \implies \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t)$$

Valor final

Propriedade 4 (Valor final)

Considere $x(t)$ tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ existe (ou seja, é finito), o que implica que $X(s)$ possui no máximo um pólo em $s = 0$ e todos os demais com parte real negativa. Então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

pois

$$sX(s) - x(0) = \mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{dt} \exp(-st) dt$$

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - x(0)$$

Transformada inversa de Laplace

A transformada inversa de Laplace é uma integral complexa que pode ser calculada usando-se técnicas de resíduo. Entretanto, no caso de funções $X(s)$ racionais, o cômputo pode ser feito por decomposição em frações parciais.

Exemplo 1.6 (Resposta ao degrau do circuito RC)

Considere o circuito RC descrito na Figura 1, com $\tau = RC$ e função de transferência dada por

$$H(s) = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}$$

Exemplo – Resposta ao degrau do circuito RC I

Para a entrada $x(t) = u(t)$,

$$Y(s) = H(s) \frac{1}{s} = \frac{1/\tau}{s(s+1/\tau)}$$

Expandindo em frações parciais, tem-se

$$Y(s) = \frac{1/\tau}{s(s+1/\tau)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/\tau}$$

resultando na resposta ao degrau dada por

$$y(t) = (1 - \exp(-t/\tau))u(t)$$

Observe que $y(t)$ atinge aproximadamente 63% do valor final decorrido $t = \tau$ e 95% para $t = 3\tau$, sendo τ denominado constante de tempo do sistema.

Exemplo – Resposta ao degrau do circuito RC II

Para $t \in [0, \tau]$ tem-se

$$y(t) \approx \frac{t}{\tau}$$

e essa aproximação é usada experimentalmente para a medida da constante de tempo de sistemas de primeira ordem.

A solução de regime é dada por

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1$$

pois o ganho DC é unitário. Note que, pelo teorema do valor final (Propriedade 4), tem-se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = H(0) = 1$$

Exemplo – Resposta ao degrau do circuito *RC* III

A resposta ao degrau para a função de transferência da tensão medida no resistor é dada por

$$Y_R(s) = \frac{1}{s + 1/\tau} \Rightarrow y_R(t) = \exp(-t/\tau)u(t)$$

e, em regime, $y_R(t) \rightarrow 0$.

Resumindo, tem-se

$$sY(s) = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau} = \begin{cases} 0 & \text{inicial} & s \rightarrow +\infty \\ 1 & \text{final} & s \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$sY_R(s) = \frac{s}{s + 1/\tau} = \begin{cases} 1 & \text{inicial} & s \rightarrow +\infty \\ 0 & \text{final} & s \rightarrow 0 \end{cases}$$

Exemplo 1.7 (Circuito RC excitado por exponencial)

Considere o circuito RC da Figura 1 com $\tau = RC$, excitado pela entrada $x(t) = \exp(-t)u(t)$ e condição inicial nula.

Para $\tau \neq 1$, tem-se

$$Y(s) = \left(\frac{1/\tau}{s+1/\tau} \right) \left(\frac{1}{s+1} \right) = \frac{a}{s+1/\tau} + \frac{b}{s+1}$$

$$b = -a = \frac{1}{1-\tau}$$

e, portanto,

$$y(t) = \frac{1}{\tau-1} \left(\exp(-t/\tau) - \exp(-t) \right) u(t)$$

Para $\tau = 1$, tem-se

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s+1} \right) \left(\frac{1}{s+1} \right) = \frac{1}{(s+1)^2}, \quad \Rightarrow \quad y(t) = t \exp(-t) u(t)$$

que poderia também ser obtido por l'Hôpital

$$y(t) = \lim_{\tau \rightarrow 1} \frac{\exp(-t/\tau) t \tau^{-2}}{1} u(t) = t \exp(-t) u(t)$$

Exemplo – Resposta ao impulso — sistema instável

Exemplo 1.8 (Resposta ao impulso — sistema instável)

A transformada de Laplace da resposta ao impulso do sistema descrito pela equação diferencial

$$\ddot{y} - \dot{y} - 2y = -3x \quad , \quad (p+1)(p-2)y = -3x$$

é dada por

$$H(s) = \frac{-3}{(s+1)(s-2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-2}$$

Portanto,

$$h(t) = (\exp(-t) - \exp(2t))u(t)$$

Note que $\lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = 0$ não corresponde ao valor $h(+\infty)$ pois uma das raízes da equação característica é positiva (sistema instável). No entanto, o valor inicial $h(0^+)$ pode ser calculado por $\lim_{s \rightarrow +\infty} sH(s) = 0$.

Exemplo – Resposta à rampado circuito RC I**Exemplo 1.9** (Resposta à rampa do circuito RC)

Considere o circuito RC descrito na Figura 1, com $\tau = RC$ e função de transferência dada por

$$H(s) = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}$$

Para entrada a $x(t) = tu(t)$,

$$Y(s) = H(s) \frac{1}{s^2} = \frac{1/\tau}{s^2(s + 1/\tau)}$$

Expandindo em frações parciais, tem-se

$$Y(s) = \frac{1/\tau}{s^2(s + 1/\tau)} = \frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau}{s + 1/\tau}$$

Exemplo – Resposta à rampa circuito RC II

resultando na resposta à rampa dada por

$$y(t) = (t - \tau + \tau \exp(-t/\tau)) u(t)$$

Para t suficientemente grande (resposta em regime) tem-se

$$y(t) \approx t - \tau$$

indicando que o sistema de primeira ordem apresenta saída em regime deslocada em relação à entrada. Note que para sistemas com ganho DC diferente de 1, a inclinação da rampa de saída é distinta da inclinação da rampa de entrada.

Exemplo – Sistema autônomo de segunda ordem

Exemplo 1.10 (Sistema autônomo de segunda ordem)

Considere o sistema dado por

$$(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)y(t) = 0 \quad , \quad y(0) = a > 0 \quad , \quad \dot{y}(0) = 0$$

com $\omega_n > 0$ e $0 < \xi < 1$ (raízes complexas conjugadas).

A transformada de Laplace $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ é dada por

$$Y(s) = \frac{2a\xi\omega_n + as}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Completando o quadrado e colocando na forma padrão para transformada inversa de seno e cosseno, tem-se

$$Y(s) = \alpha \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \beta \frac{\omega_d}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

com

$$\alpha = a \quad , \quad \beta = a \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad , \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Exemplo – Sistema autônomo de segunda ordem

resultando em

$$y(t) = a \exp(-\xi \omega_n t) \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t) \right) u(t)$$

Note que, para $\xi = 0$ (sistema sem amortecimento), a resposta é dada por $y(t) = a \cos(\omega_n t)$. Note também que a envoltória da solução comporta-se como um sistema de primeira ordem cuja constante de tempo é

$$\tau = \frac{1}{\xi \omega_n}$$

Exemplo – Pêndulo linearizado I

Exemplo 1.11 (Pêndulo linearizado)

A equação diferencial linear que descreve o movimento do pêndulo em torno de $y(t) = 0$ é dada por

$$m\ell\ddot{y} = -mg\text{sen}y - mby$$

Linearizando, tem-se

$$\left(p^2 + \frac{b}{\ell}p + \frac{g}{\ell}\right)y(t) = 0$$

Portanto,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad , \quad 2\xi\omega_n = \frac{b}{\ell} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{b}{2\sqrt{\ell g}}$$

Exemplo – Pêndulo linearizado II

Observe que, se $b = 0$ (pêndulo não amortecido), o período de oscilação (expressão obtida experimentalmente por Galileo Galilei por volta de 1600) é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Exemplo – Circuito *RLC* I

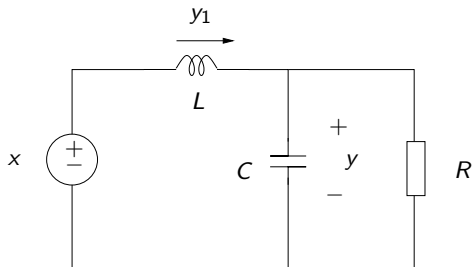
Exemplo 1.12 (Circuito *RLC*)

Considere o circuito *RLC* da Figura 2 para $x(t) = 0$ (circuito autônomo). A equação diferencial é dada por

$$\left(p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC}\right)y(t) = 0$$

Portanto,

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad 2\xi\omega_n = \frac{1}{RC} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Exemplo – Circuito *RLC* IIFigura: Circuito *RLC*.

Observe que, para $R \rightarrow \infty$ (circuito sem perdas), tem-se

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Note também que a constante de tempo da envoltória é $\tau = 2RC$.

Exemplo – Resposta ao impulso de sistema de segunda ordem subamortecido I

Exemplo 1.13 (Resposta ao impulso de sistema de segunda ordem subamortecido)

Considere o sistema dado por

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

com $0 < \xi < 1$.

Completando-se o quadrado no denominador, tem-se

$$H(s) = \left(\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \frac{\omega_d}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

com a frequência de oscilação ω_d dada por

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Exemplo – Resposta ao impulso de sistema de segunda ordem subamortecido II

resultando em

$$h(t) = \left(\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \exp(-\xi \omega_n t) \text{sen}(\omega_d t) u(t)$$

Esse resultado pode ser também obtido a partir da expansão em frações parciais de $H(s)$, ou seja,

$$H(s) = \frac{a_1}{(s-\lambda_1)} + \frac{a_2}{(s-\lambda_2)}$$

$$h(t) = (a_1 \exp(\lambda_1 t) + a_2 \exp(\lambda_2 t)) u(t)$$

com

$$\lambda_2^* = \lambda_1 = -\xi \omega_n + j \omega_d \quad , \quad a_2^* = a_1 = -j \frac{\omega_n^2}{2\omega_d}$$

Exemplo – Resposta ao impulso de sistema de segunda ordem subamortecido III

resultando em

$$h(t) = \left(\frac{\omega_n^2}{\omega_d} \right) \exp(-\xi \omega_n t) \text{sen}(\omega_d t) u(t)$$

A identificação dos parâmetros de um sistema de segunda ordem subamortecido pode ser feita a partir da resposta ao impulso.

O período $T = 2\pi/\omega_d$ da senóide é obtido pelo cômputo do intervalo de tempo entre dois cruzamentos consecutivos com zero.

O parâmetro ξ é obtido da relação entre dois picos consecutivos da senóide, chamada de decremento logarítmico, pois

$$\frac{\exp(-\xi \omega_n k T)}{\exp(-\xi \omega_n (k+1) T)} = \exp(\xi \omega_n T)$$

Exemplo – Resposta ao impulso de sistema de segunda ordem subamortecido IV

Observe que

$$\xi \omega_n T = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Exemplo – Resposta ao degrau de sistema de segunda ordem subamortecido I

Exemplo 1.14 (Resposta ao degrau de sistema de segunda ordem subamortecido)

Considere o sistema dado por

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

com $0 < \xi < 1$.

Para $x(t) = u(t)$, tem-se

$$Y(s) = \left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right) \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Completando-se os quadrados, tem-se

Exemplo – Resposta ao degrau de sistema de segunda ordem subamortecido II

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \xi \omega_n}{(s + \xi \omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi \omega_n}{\omega_d} \frac{\omega_d}{(s + \xi \omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

resultando em

$$y(t) = \left(1 - \exp(-\xi \omega_n t) \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \operatorname{sen}(\omega_d t) \right) \right) u(t)$$

A resposta ao degrau passa por um primeiro pico (sobre-elevação) que pode ser determinado da equação $\dot{y}(t) = 0$, resultando em

$$t_{\text{pico}} = \pi / \omega_d \quad , \quad y_{\text{pico}} = 1 + \exp(-\xi \omega_n \pi / \omega_d)$$

Esses parâmetros podem ser utilizados para a identificação de sistemas de segunda ordem.

Note que o valor de regime ($t \rightarrow \infty$) é igual ao valor da amplitude do degrau de entrada pois o ganho DC do sistema é unitário ($H(0) = 1$).

Resposta à entrada nula e resposta às condições iniciais nulas

Propriedade 5 (Resposta à entrada nula e resposta às condições iniciais nulas)

A resposta de um sistema linear invariante no tempo descrito por

$$D(p)y(t) = x(t) \quad ; \quad y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(m-1)}(0)$$

pode ser decomposta em resposta à entrada nula e resposta às condições iniciais nulas, pois

$$Y(s) = H(s)X(s) + I(s)$$

sendo $I(s)$ a parcela devida às condições iniciais.

Note que as condições iniciais não nulas em $x(t)$ também devem ser consideradas no cômputo da solução sempre que $N(p)$ for de grau maior ou igual a 1 e $x(t) \neq 0$.

Exemplo

Exemplo 1.15

Considere o circuito RC da Figura 1 com $\tau = RC = 1$, excitado pela entrada $x(t) = \cos(t)u(t)$ e condição inicial $y(0)$.

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{H(s)} X(s) + \frac{1}{s+1} y(0)$$

Portanto,

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+1)} + \frac{y(0)}{s+1} = \frac{y(0)-1/2}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{s+1}{s^2+1}$$

$$y(t) = \left((y(0)-1/2)\exp(-t) + \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(t) \right) u(t)$$

Exemplo (continuação)

Note que a resposta $y(t)$ contém termos transitórios devido à entrada e devido à condição inicial $y(0)$. Note ainda que, no exemplo, a condição inicial $y(0) = 1/2$ anula o transitório. Nesse caso, a solução é a própria resposta de regime permanente, dada por

$$y_{\text{reg}}(t) = \left(\frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \text{sen}(t) \right) u(t)$$

que é igual à solução forçada para $t > 0$. De fato, para a entrada $x(t) = \cos(t)$ a solução forçada poderia ser obtida diretamente

$$y_f(t) = |H(s)|_{s=j} \cos(t + \angle H(s)|_{s=j}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t - \pi/4) = \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{2} \text{sen}(t)$$

Exemplo – Laplace com $N(p) \neq 1$ I**Exemplo 1.16** (Laplace com $N(p) \neq 1$)

Considere a equação diferencial

$$(p^2 + 3p + 2)y = (p + 4)x, \quad y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 1$$

para $x(t) = \exp(-3t)u(t)$.

Aplicando a transformada de Laplace, tem-se

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 3)y(0) + \dot{y}(0) + (s + 4)X(s) - x(0)$$

Substituindo as condições iniciais e a transformada de Laplace de $\exp(-3t)u(t)$, tem-se

$$Y(s) = \underbrace{\frac{2s+7}{s^2+3s+2}}_{Y_{en}(s)} + \underbrace{\frac{s+4}{(s^2+3s+2)(s+3)}}_{Y_{cin}(s)} + \underbrace{\frac{-1}{s^2+3s+2}}_{Y_{x(0)}(s)}$$

Exemplo – Laplace com $N(p) \neq 1$ II

com as parcelas, respectivamente, resposta à entrada nula, resposta às condições iniciais nulas e contribuição da condição inicial $x(0)$. Decompondo em frações parciais, tem-se

$$Y(s) = \underbrace{\frac{5}{s+1} - \frac{3}{s+2}}_{Y_{en}(s)} + \underbrace{\frac{1.5}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{0.5}{s+3}}_{Y_{cin}(s)} + \underbrace{\frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s+2}}_{Y_{x(0)}(s)}$$

que fornece, agrupando as parcelas,

$$y(t) = (5.5\exp(-t) - 4\exp(-2t) + 0.5\exp(-3t))u(t)$$

Note que, para $x(t) = \exp(-3t)$, tem-se $(p+4)\exp(-3t) = \exp(-3t)$ e portanto a equação diferencial a ser resolvida é dada por

$$(p^2 + 3p + 2)y = \exp(-3t) \quad , \quad y(0) = 2 \quad , \quad \dot{y}(0) = 1$$

Exemplo – Laplace com $N(p) \neq 1$ III

Nessa equação, $N(p) = 1$ e a questão sobre a contribuição de $x(0)$ não se coloca. Multiplicando por $u(t)$ e aplicando a transformada de Laplace, tem-se $Y(s)$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 3)2 + 1 + \frac{1}{s + 3} \Rightarrow Y(s) = \frac{5}{s + 1} - \frac{3}{s + 2} + \frac{0.5}{s + 1} - \frac{1}{s + 2} + \frac{0.5}{s + 3}$$

que fornece o mesmo $y(t)$.

Resposta ao impulso de sistema estável

Propriedade 6 (Resposta ao impulso de sistema estável)

A resposta ao impulso de um sistema linear invariante no tempo racional estritamente próprio (grau do numerador menor que o do denominador) com polos de parte real negativa e função de transferência

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

é transitória, ou seja, esvanece com o tempo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$$

Como $s = 0$ pertence a Ω_h (polos de parte real negativa), tem-se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = 0$$

o que qualifica o comportamento de $h(t)$ como assintoticamente estável.

Resposta ao degrau de sistema estável

Propriedade 7 (Resposta ao degrau de sistema estável)

A resposta de um sistema linear invariante no tempo racional estritamente próprio com polos de parte real negativa excitado por um degrau com função de transferência

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

é dada por

$$y(t) = \underbrace{H(0)u(t)}_{\text{regime}} + \text{transitório}$$

pois

$$Y(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{a}{s} + \frac{N_1(s)}{D(s)}, \quad a = H(0)$$

Note que a saída em regime é também um degrau, com a mesma amplitude da entrada se $H(0) = 1$.

Resposta à rampa de sistema estável

Propriedade 8 (Resposta à rampa de sistema estável)

A resposta de um sistema linear invariante no tempo racional estritamente próprio com polos de parte real negativa excitado por uma rampa com função de transferência

$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ é dada por

$$y(t) = \underbrace{H(0)tu(t) + \dot{H}(0)u(t)}_{\text{regime}} + \text{transitório}$$

A propriedade pode ser verificada notando-se que

$$Y(s) = \frac{H(s)}{s^2} = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{N_1(s)}{D(s)}, \quad a = H(0), \quad b = \left. \frac{d}{ds} H(s) \right|_{s=0}$$

resultando em $y(t) = H(0)tu(t) + \dot{H}(0)u(t) + \text{transitório}$

Note que a saída em regime é também uma rampa, com a mesma inclinação se $H(0) = 1$ e, além disso, de mesmo valor se $\dot{H}(0) = 0$.

Exemplo – Resposta ao degrau e à rampa

Exemplo 1.17 (Resposta ao degrau e à rampa)

Um sistema de primeira ordem dado por

$$H(s) = \frac{a}{s+a}$$

com $a > 0$ segue uma entrada em degrau. Note que esse sistema não segue a entrada $x(t) = tu(t)$ em regime com erro nulo, pois $H(0) = 1$ mas $\dot{H}(0) = -1/a \neq 0$.

Um sistema de segunda ordem dado por

$$H(s) = \frac{as+b}{s^2+as+b}$$

com $a > 0$ e $b > 0$ segue as entradas degrau e rampa com erro de regime nulo.

Resposta à parábola de sistema estável

Propriedade 9 (Resposta à parábola de sistema estável)

A resposta de um sistema linear invariante no tempo racional estritamente próprio com polos de parte real negativa excitado por uma parábola com função de transferência

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad , \quad x(t) = \frac{t^2}{2}u(t) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s^3}$$

é dada por

$$y(t) = \underbrace{H(0)\frac{t^2}{2}u(t) + \dot{H}(0)tu(t) + \frac{1}{2}\ddot{H}(0)u(t)}_{\text{regime}} + \text{transitório}$$

pois

$$Y(s) = \frac{H(s)}{s^3} = \frac{a}{s^3} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s} + \frac{N_2(s)}{D(s)}, \quad \text{com}$$

$$a = H(0) \quad , \quad b = \left. \frac{d}{ds} H(s) \right|_{s=0} \quad , \quad c = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} H(s) \right|_{s=0}$$

Exemplo – Resposta à parábola

Exemplo 1.18 (Resposta à parábola)

Um sistema de terceira ordem dado por

$$H(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^3 + as^2 + bs + c}$$

com raízes estáveis segue as entradas degrau, rampa e parábola com erro de regime nulo.