Livro (e-book): Linearidade em Sinais e Sistemas, Ivanil S. Bonatti, Amauri Lopes, Pedro L. D. Peres, Cristiano M. Agulhari,

Ed. Blucher, SP, 2015, 1ed., ISBN: 9788521208921.

Prof. Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Observabilidade

Definição 1 (Observabilidade)

Um sistema contínuo autônomo descrito por

$$\dot{v}(t) = f(v(t), t) \quad , \quad y(t) = g(v(t), t)$$

é observável em t_0 se existir $\tau > 0$ tal que o conhecimento da saída $y(t)$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ é suficiente para determinar a condição $v(t_0)$.

Sistemas lineares invariantes no tempo com saída escalar, descritos por

$$\dot{v}(t) = Av(t) \quad , \quad v \in \mathbb{R}^n \qquad ; \qquad y(t) = cv(t) \in \mathbb{R}$$

são observáveis se existir $\tau > 0$ tal que o conhecimento da saída $y(t)$ para todo $t \in [0, \tau]$ é suficiente para determinar a condição inicial $v(0)$.

Matriz de observabilidade I

Propriedade 1 (Matriz de observabilidade)

O sistema linear invariante no tempo

$$\dot{v} = Av \quad , \quad y = cv$$

com $v \in \mathbb{R}^n$ *é observável se e somente se o* rank *da matriz de observabilidade* $Obsv(A, c)$ *for igual a* n

$$Obsv(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Ou seja, o sistema é observável se e somente se $\det(Obsv(A, c)) \neq 0$.

Matriz de observabilidade II

Prova:

$$y(t) = c\exp(At)v(0)$$

Derivando $n-1$ vezes $y(t)$ e computando em $t=0$, tem-se

$$\mathrm{Obsv}(A,c)v(0) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} v(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}$$

que tem solução em $v(0)$ sempre que o *rank* de $\mathrm{Obsv}(A,c)$ for igual a n. Note que é preciso conhecer $y(t)$ em uma vizinhança do zero para determinar os valores das derivadas em $t=0$.

c e $A-\lambda \mathrm{I}$ coprimos à direita I

Propriedade 2 (c e $A-\lambda \mathrm{I}$ coprimos à direita)

O sistema

$$\dot{v} = Av \quad , \quad y = cv$$

é observável ou, equivalentemente, o par (A, c) *é observável, se e somente se a matriz*

$$\begin{bmatrix} A-\lambda I \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times n}$$

tiver rank n *(isto é,* rank *completo de colunas) para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Como* $\det(A-\lambda I) \neq 0$ *para* $\lambda \in \mathbb{C}$ *que não é autovalor de* A*, basta testar o* rank *da matriz para os* λ*'s autovalores de* A*.*

Se a matriz acima tem rank n*, diz-se que* $A-\lambda I$ *e* c *são coprimos à direita, isto é, que não possuem nenhum fator comum à direita.*

c e $A-\lambda\mathrm{I}$ coprimos à direita II

Prova: o *rank* completo de colunas $\forall\lambda$ autovalor de A implica que não existe um vetor $v \neq 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} A-\lambda\mathrm{I} \\ c \end{bmatrix} v = 0$$

Se existirem λ_1 e $v_1 \neq 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} A-\lambda_1\mathrm{I} \\ c \end{bmatrix} v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Av_1 = \lambda_1 v_1 \ , \ cv_1 = 0$$

tem-se que v_1 é um autovetor associado ao autovalor λ_1. Assim,

$$A^2 v_1 = A\lambda_1 v_1 = \lambda_1^2 v_1 \quad , \quad A^{n-1} v_1 = \lambda_1^{n-1} v_1$$

e, portanto,

$$\begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} v_1 = \begin{bmatrix} c \\ \lambda_1 c \\ \lambda_1^2 c \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} c \end{bmatrix} v_1 = 0$$

indicaria que $rank\big(\mathrm{Obsv}(A,c)\big) < n$, ou seja, que o sistema é não observável.

Exemplo – Sistema não observável I

Exemplo 1.1 (Sistema não observável)

O sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} v$$

não é observável, pois a matriz de observabilidade dada por

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

tem determinante igual a zero. Note que, para uma condição inicial $v(0) = v_0$, tem-se

$$Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1} v_0 = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} \big(v_1(0) + v_2(0) \big)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \big(v_1(0) + v_2(0) \big) \exp(-2t) u(t)$$

e, portanto, o conhecimento de $y(t)$ não permite determinar de maneira individualizada $v_1(0)$ e $v_2(0)$.

Exemplo – Sistema não observável II

Note ainda que os autovalores de A são -1 e -2, e que embora

$$\begin{bmatrix} M_{-2} \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-(-2)\mathrm{I} \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

possua *rank* 2, indicando que M_{-2} e c são coprimos, para $\lambda = -1$ tem-se

$$rank \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$M_{-1} = A-(-1)\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad c = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e, portanto, a matriz M_{-1}, que tem *rank* 1, possui um fator comum à direita com o vetor c (não são coprimos à direita), confirmando pela Propriedade 2 que o sistema não é observável.

Exemplo – Sistema observável I

Exemplo 1.2 (Sistema observável)

O sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v$$

é observável, pois a matriz de observabilidade dada por

$$\mathrm{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem determinante diferente de zero. Para uma condição inicial $v(0) = v_0$, tem-se

$$Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1} v_0 = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} v_1(0) + \frac{1}{(s+1)(s+2)} v_2(0)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \big(2\exp(-t) - \exp(-2t)\big) v_1(0) u(t) + \big(\exp(-t) - \exp(-2t)\big) v_2(0) u(t)$$

Exemplo – Sistema observável II

$$y(0) = v_1(0) \quad , \quad \dot{y}(0) = v_2(0)$$

Neste caso, o conhecimento de $y(t)$ permite determinar a condição inicial.

Confirmando, pela Propriedade 2, tem-se

$$\begin{bmatrix} M_{-2} \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - (-2)\mathrm{I} \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{-1} \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - (-1)\mathrm{I} \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ambas com *rank* 2 (não há fator comum entre M_λ e c que possa ser colocado em evidência à direita).

Exemplo I

Exemplo 1.3

Considere o circuito da Figura 1 com $\sigma > 0$ e as variáveis de estado v_1 (tensão no capacitor) e v_2 (corrente no indutor).

Exemplo II

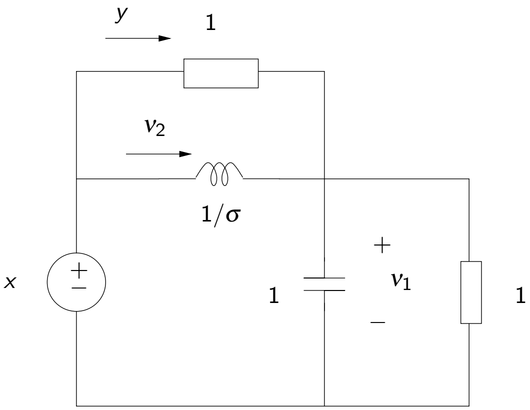

Figura : Circuito RLC com $R = C = 1$ e $L = 1/\sigma$.

Exemplo III

$$v_2 + \frac{1}{\sigma}\dot{v}_2 = \dot{v}_1 + v_1 \quad ; \quad x = \frac{1}{\sigma}\dot{v}_2 + v_1 \quad ; \quad y = \frac{1}{\sigma}\dot{v}_2$$

Colocando na forma matricial, tem-se

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx \tag{1}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -\sigma & 0 \end{bmatrix} , \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma \end{bmatrix} , \ c = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} , \ d = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

A matriz de observabilidade é dada por

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é

$$\det(\text{Obsv}(A, c)) = 1 \neq 0$$

indicando que o sistema (1)-(2) é observável independentemente de σ.

Exemplo IV

A equação diferencial em y é

$$D(p)y = N(p)x \quad , \quad D(p) = p^2 + 2p + \sigma \quad , \quad N(p) = p(p+1)$$

Note que para $\sigma = 1$ (constantes de tempo das malhas indutiva e capacitiva idênticas) ocorre um cancelamento entre zero e pólo.

Exemplo I

Exemplo 1.4

Considere novamente o circuito descrito na Figura 1, com $\sigma > 0$, cuja equação diferencial em y é

$$D(p)y = N(p)x \quad , \quad D(p) = p^2 + 2p + \sigma \quad , \quad N(p) = p(p+1)$$

$$N(p) = D(p) + \bar{N}(p) \quad \Rightarrow \quad \bar{N}(p) = -p - \sigma$$

A representação em equações de estado na forma companheira (note que as variáveis de estado v_1 e v_2 não mais correspondem à tensão no capacitor v_1 e à corrente no indutor v_2) é dada por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \tag{3}$$

$$y = \begin{bmatrix} -\sigma & -1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} x \tag{4}$$

Exemplo II

A matriz de observabilidade para o sistema (3)-(4) é dada por

$$\text{Obsv}(A,c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & -1 \\ \sigma & 2-\sigma \end{bmatrix}$$

cujo determinante é

$$\det(\text{Obsv}(A,c)) = \sigma(\sigma - 1)$$

Portanto, a realização (3)-(4) do sistema (variáveis v_1 e v_2) não é observável se $\sigma = 1$.

Note, portanto, que a observabilidade depende da representação interna do sistema, isto é, da escolha das variáveis de estado.

Exemplo I

Exemplo 1.5

Considere o circuito da Figura 2, cujas equações de estado e de saída são

$$v_2 + \frac{L\dot{v}_2}{R_2} = C\dot{v}_1 + \frac{v_1}{R_1} \quad ; \quad x = L\dot{v}_2 + v_1$$
$$y = \frac{L}{R_2}\dot{v}_2$$

Colocando na forma matricial, tem-se

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx \tag{5}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\left(\dfrac{1}{R_1 C} + \dfrac{1}{R_2 C}\right) & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_2 C} \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix}, \; d = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_2} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Exemplo II

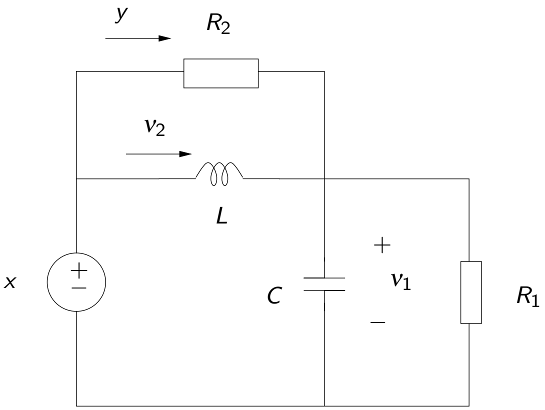

Figura : Circuito RLC.

Exemplo III

A matriz de observabilidade é dada por

$$\mathrm{Obsv}(A,c) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_2} & 0 \\ \dfrac{1}{R_2}\left(\dfrac{1}{R_1C}+\dfrac{1}{R_2C}\right) & -\dfrac{1}{R_2C} \end{bmatrix}$$

cujo determinante é

$$\det(\mathrm{Obsv}(A,c)) = \frac{1}{R_2^2C} \neq 0$$

indicando que o sistema (5)-(6) é observável.

A equação diferencial em y é

$$D(p)y = N(p)x \quad , \quad D(p) = p^2 + \left(\frac{1}{R_1C}+\frac{1}{R_2C}\right)p + \frac{1}{LC} \quad , \quad N(p) = \frac{1}{R_2}p\left(p+\frac{1}{R_1C}\right)$$

A divisão $N(p)/D(p)$ resulta em $\beta_2 = 1/R_2$ e

Exemplo IV

$$\bar{N}(p) = -\frac{1}{R_2^2 C} p - \frac{1}{R_2 L C}$$

A representação em equações de estado na forma companheira (note que as variáveis de estado v_1 e v_2 não mais correspondem à tensão no capacitor v_1 e à corrente no indutor v_2) é dada por

$$\dot{v} = \tilde{A} v + \tilde{b} x \quad , \quad y = \tilde{c} v + \tilde{d} x \tag{7}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C}\right) \end{bmatrix}, \; \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \tilde{c} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 L C} & -\frac{1}{R_2^2 C} \end{bmatrix}, \; \tilde{d} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

Exemplo V

A matriz de observabilidade para o sistema (7) é dada por

$$\text{Obsv}(\tilde{A},\tilde{c}) = \frac{1}{R_2 L C}\begin{bmatrix} -1 & -\dfrac{L}{R_2} \\ \dfrac{1}{R_2 C} & \dfrac{L}{R_2}\left(\dfrac{1}{R_1 C}+\dfrac{1}{R_2 C}\right)-1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\text{Obsv}(\tilde{A},\tilde{c})) = \frac{1}{R_2^2 L^2 C^2}\left(1-\frac{L}{R_1 R_2 C}\right)$$

Portanto, o sistema (7) (variáveis v_1 e v_2) não é observável se as constantes de tempo das malhas LR_2 e $R_1 C$ forem idênticas, isto é, se

$$\frac{L}{R_2} = R_1 C$$

Observabilidade de sistemas similares

Propriedade 3 (Observabilidade de sistemas similares)

Transformações de similaridade não alteram a observabilidade de um sistema linear invariante no tempo.

Prova:
Os sistemas similares, com T não singular, dados por

$$\dot{v} = Av \quad , \quad v = T\hat{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\hat{v}} = T^{-1}\dot{v} = T^{-1}Av = T^{-1}AT\hat{v} \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = T^{-1}AT$$

$$y = cv = cT\hat{v} \quad \Rightarrow \quad \hat{c} = cT$$

têm matrizes de observabilidade que verificam

$$rank \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{c}\hat{A} \\ \vdots \\ \hat{c}\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix} = rank \left(\begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} T \right) = rank \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Exemplo I

Exemplo 1.6

Considere o sistema descrito por

$$\dot{v} = Av \quad , \quad y = cv$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

O sistema é observável, pois

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -8 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(\text{Obsv}(A, c)) = 16 \neq 0$$

Exemplo II

Escolhendo

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e escrevendo as equações em termos de $v = T\hat{v}$, tem-se

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 9 & -9 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{c} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Obsv}(\hat{A}, \hat{c}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}] \quad , \quad \det(\text{Obsv}(\hat{A}, \hat{c})) = -16 \neq 0$$

Controlabilidade

Definição 2 (Controlabilidade)

Um sistema contínuo descrito por

$$\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t)$$

é controlável em t_0 *se existir* $\tau > 0$ *finito e uma entrada* $x(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ *que leve o sistema de um estado inicial qualquer* $v(t_0)$ *para um estado arbitrário* $v(t_0 + \tau)$.

Sistemas lineares invariantes no tempo com entrada escalar, descritos por

$$\dot{v}(t) = Av(t) + bx(t) \quad , \quad v \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad x(t) \in \mathbb{R}$$

são controláveis se para qualquer estado inicial $v(0)$ *e um estado* $v(\tau)$ *final arbitrário, existir uma entrada* $x(t)$, $t \in [0, \tau]$ *que leve o sistema de* $v(0)$ *a* $v(\tau)$ *em tempo finito* τ.

Matriz de controlabilidade I

Propriedade 4 (Matriz de controlabilidade)

O sistema linear invariante no tempo

$$\dot{v} = Av + bx$$

com $v \in \mathbb{R}^n$ *é controlável se e somente se o* rank *da matriz de controlabilidade* $Ctrb(A, b)$ *for igual a* n

$$Ctrb(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b & \cdots & A^{n-1} b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Ou seja, o sistema é controlável se e somente se $\det(Ctrb(A, b)) \neq 0$.

Prova:
A solução $v(t)$, com condição inicial $v(0)$ conhecida e uma entrada $x(t)$, é dada por

$$v(t) = \exp(At)v(0) + \big(\exp(At)u(t)\big) * bx(t)$$

Matriz de controlabilidade II

Por Cayley-Hamilton, tem-se

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k(t) A^k$$

e portanto

$$v(t) = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \rho_k(t) A^k u(t)\Big) * bx(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k b \; \sigma_k(t)$$

com

$$v(t) = v(t) - \exp(At)v(0) \quad , \quad \sigma_k(t) = \big(\rho_k(t)u(t)\big) * x(t)$$

Para $t = \tau$, tem-se

$$v(\tau) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b & \cdots & A^{n-1} b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0(\tau) \\ \sigma_1(\tau) \\ \vdots \\ \sigma_{n-1}(\tau) \end{bmatrix}$$

que possui solução sempre que o *rank* de $\mathrm{Ctrb}(A, b)$ for igual a n.

b e $A-\lambda\mathrm{I}$ coprimos à esquerda I

Propriedade 5 (b e $A-\lambda\mathrm{I}$ coprimos à esquerda)

O sistema

$$\dot{v} = Av + bx$$

é controlável ou, equivalentemente, o par (A, b) *é controlável, se e somente se a matriz*

$$\begin{bmatrix} A-\lambda I & b \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times(n+1)}$$

tiver rank n *(isto é,* rank *completo de linhas) para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Como* $\det(A-\lambda I) \neq 0$ *para* $\lambda \in \mathbb{C}$ *que não é autovalor de* A*, basta testar o* rank *da matriz para os* λ*'s autovalores de* A*.*

Se a matriz acima tem rank n*, diz-se que* $A-\lambda I$ *e* b *são coprimos à esquerda, isto é, que não possuem nenhum fator comum à esquerda.*

b e $A-\lambda\mathrm{I}$ coprimos à esquerda II

Prova: o *rank* completo de linhas $\forall\lambda$ autovalor de A implica que não existe um vetor $q \neq 0$ tal que

$$q' \begin{bmatrix} A-\lambda\mathrm{I} & b \end{bmatrix} = 0$$

Se existirem λ_1 e $q_1 \neq 0$ tais que

$$q_1' \begin{bmatrix} A-\lambda_1\mathrm{I} & b \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1' A = \lambda_1 q_1' \ , \ q_1' b = 0$$

tem-se que q_1 é um autovetor à esquerda associado ao autovalor λ_1, $q_1' A^{n-1} = q_1' \lambda_1^{n-1}$ e, portanto,

$$q_1' \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b & \cdots & A^{n-1} b \end{bmatrix} = q_1' \begin{bmatrix} \lambda_1 b & \lambda_1^2 b & \cdots & \lambda_1^{n-1} b \end{bmatrix} = 0$$

indicando que o sistema é não controlável.

Exemplo – Sistema não controlável I

Exemplo 1.7 (Sistema não controlável)

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x$$

Analisando a controlabilidade, tem-se

$$\det(\mathrm{Ctrb}(A,b)) = \det \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & -2b_1 - 3b_2 \end{bmatrix} = -(2b_1^2 + 3b_1 b_2 + b_2^2)$$

e portanto para $b_2 = -b_1$ ou $b_2 = -2b_1$, o sistema é não controlável (determinante igual a zero).

Utilizando o operador p, tem-se

$$v = (p\mathrm{I} - A)^{-1} b x = \frac{1}{D(p)} \begin{bmatrix} p+3 & 1 \\ -2 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x \quad , \quad D(p) = (p+1)(p+2)$$

Exemplo – Sistema não controlável II

As duas situações de não controlabilidade implicam

$$b_1 = -b_2 = \beta \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\beta}{p+1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x \quad , \quad b_2 = -2b_1 = -2\beta \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\beta}{p+2}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} x$$

Note que não é possível controlar individualmente os dois estados e que, em cada uma das situações, um dos modos próprios não aparece na equação diferencial.

Confirmando, pela Propriedade 5 tem-se

$$\begin{bmatrix} A-(-1)\mathrm{I} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ -2 & -2 & b_2 \end{bmatrix}$$

que tem *rank* 1 se $b_2 = -2b_1$ e

$$\begin{bmatrix} A-(-2)\mathrm{I} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & b_1 \\ -2 & -1 & b_2 \end{bmatrix}$$

que tem *rank* 1 se $b_1 = -b_2$.

Exemplo – Sistema controlável I

Exemplo 1.8 (Sistema controlável)

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x \quad , \quad v(0) = 0$$

O sistema é controlável, pois

$$\det(\mathrm{Ctrb}(A, b)) = \det \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = -6$$

Aplicando a transformada de Laplace, tem-se

$$V(s) = (s\mathrm{I} - A)^{-1} b X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} X(s)$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+4 \\ s-2 \end{bmatrix} X(s)$$

Exemplo – Sistema controlável II

Para $X(s)$ igual a

$$X(s) = \alpha\frac{s+1}{s+4} + \beta\frac{s+2}{s-2}$$

tem-se

$$V(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{s+4}{(s+1)(s-2)} \\ \dfrac{s-2}{(s+2)(s+4)} & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

e portanto

$$v(t) = \begin{bmatrix} \exp(-2t) & -\exp(-t) + 2\exp(2t) \\ -2\exp(-2t) + 3\exp(-4t) & \exp(-t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Exemplo – Sistema controlável III

Note que o determinante da matriz que relaciona $v(t)$ com os parâmetros α e β é

$$\gamma(t) = 4 - 6\exp(-2t) - \exp(-3t) + 3\exp(-5t) \neq 0 \quad , \quad \forall t \neq 0$$

e, portanto, para qualquer $(t = \bar{t}, v(t) = \bar{v})$ é possível encontrar α e β que levam o sistema de $v(0) = 0$ a $\bar{v}$ no intervalo $[0, \bar{t}]$, confirmando que o sistema é controlável.

A solução é dada por

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma(\bar{t})} \begin{bmatrix} \exp(-\bar{t}) & \exp(-\bar{t}) - 2\exp(2\bar{t}) \\ 2\exp(-2\bar{t}) - 3\exp(-4\bar{t}) & \exp(-2\bar{t}) \end{bmatrix} \bar{v}$$

Entrada $x(t)$ que leva de 0 a $v(\tau)$

Propriedade 6 (Entrada $x(t)$ que leva de 0 a $v(\tau)$)

Para sistemas controláveis, existe $\beta \in \mathbb{R}^n$ *tal que a entrada*

$$x(t) = b' \exp(-A't)\beta u(t) \quad , \quad t \in [0, \tau]$$

leva o sistema da condição inicial $v(0) = 0$ *para* $v(\tau)$ *arbitrário.*

Exemplo I

Exemplo 1.9

Considere novamente o sistema controlável do Exemplo 1.8 e a condição $v(1)$ dados por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x \;\; , \;\; v(0) = 0 \; , \quad , \;\; v(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = b' \exp(-A't)\beta u(t) \;\; \Rightarrow \;\; X(s) = b'(s\mathrm{I} + A')^{-1}\beta = \frac{1}{(s-1)(s-2)} \begin{bmatrix} s-4 & s+2 \end{bmatrix} \beta$$

Como

$$V(s) = (s\mathrm{I} - A)^{-1} b X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+4 \\ s-2 \end{bmatrix} X(s)$$

tem-se

$$\begin{aligned} V(s) = M(s)\beta &= (s\mathrm{I} - A)^{-1} b b' (s\mathrm{I} + A')^{-1}\beta \\ &= \frac{1}{(s^2-1)(s^2-4)} \begin{bmatrix} s^2 - 16 & (s+2)(s+4) \\ (s-2)(s-4) & s^2 - 4 \end{bmatrix} \beta \end{aligned}$$

Exemplo II

Note que o determinante da matriz $M(s)$ é nulo para todo s, pois $\det(bb') = 0$. Entretanto, $M(t) = \mathscr{L}^{-1}\{M(s)\}$ possui inversa para todo $t > 0$ (sistema controlável), e é dada por

$$M(t) = \begin{bmatrix} 2.5\exp(t) - \exp(2t) - 2.5\exp(-t) + \exp(-2t) & -2.5\exp(t) + 2\exp(2t) + 0.5\exp(-t) \\ -0.5\exp(t) + 2.5\exp(-t) - 2\exp(-2t) & \sinh(t) \end{bmatrix}$$

Em $t = 1$, tem-se

$$M(1) \approx \begin{bmatrix} -1.38 & 8.17 \\ -0.710 & 1.18 \end{bmatrix} \quad , \quad M(1)\beta = v(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx \begin{bmatrix} 6.14 \\ 1.16 \end{bmatrix}$$

A Figura 3 mostra a simulação numérica do sistema para a entrada

$$x(t) = b' \exp(-A't)\beta \approx \begin{bmatrix} 3\exp(t) - 2\exp(2t) & 4\exp(2t) - 3\exp(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.14 \\ 1.16 \end{bmatrix}$$

Exemplo III

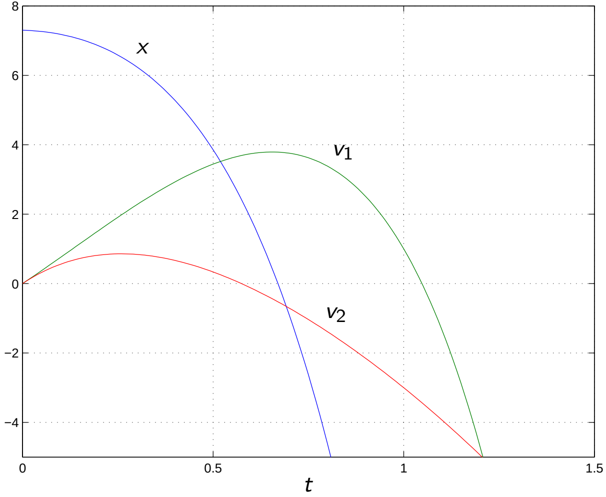

Figura : Simulação do sistema do Exemplo 1.9.

Controlabilidade de sistemas similares

Propriedade 7 (Controlabilidade de sistemas similares)

Transformações de similaridade não alteram a controlabilidade de um sistema linear invariante no tempo.

Prova:
Os sistemas similares, com T não singular, dados por

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad v = T\hat{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\hat{v}} = T^{-1}\dot{v} = T^{-1}Av + T^{-1}bx = T^{-1}AT\hat{v} + T^{-1}bx$$

$$\Rightarrow \quad \hat{A} = T^{-1}AT \ , \ \hat{b} = T^{-1}b$$

têm matrizes de controlabilidade que verificam

$$\begin{aligned} rank\begin{bmatrix}\hat{b} & \hat{A}\hat{b} & \cdots & \hat{A}^{n-1}\hat{b}\end{bmatrix} &= rank\left(T^{-1}\begin{bmatrix}b & Ab & \cdots & A^{n-1}b\end{bmatrix}\right) \\ &= rank\begin{bmatrix}b & Ab & \cdots & A^{n-1}b\end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo I

Exemplo 1.10

Considere o sistema descrito por

$$\dot{v} = Av + bx$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

O sistema é controlável, pois

$$\text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(\text{Ctrb}(A, b)) = 16 \neq 0$$

Exemplo II

Escolhendo

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e escrevendo as equações em termos de $v = T\hat{v}$, tem-se

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -4 & -9 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(\mathrm{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b})) = -16 \neq 0$$

Dualidade

Propriedade 8 (Dualidade)

O sistema (A, b, c, d) *é controlável se e somente se o sistema dual* (A', c', b', d) *é observável, e vice-versa, isto é, o sistema* (A, b, c, d) *é observável se e somente se o sistema dual* (A', c', b', d) *é controlável.*

Prova:

$$Ctrb(A, b) = \big(Obsv(A', b')\big)' \quad , \quad Obsv(A, c) = \big(Ctrb(A', c')\big)'$$

Exemplo I

Exemplo 1.11

Considere novamente o circuito da Figura 1, com $\sigma > 0$, descrito pela equação diferencial

$$D(p)y = N(p)x \quad , \quad D(p) = p^2 + 2p + \sigma \quad , \quad N(p) = p(p+1)$$

com a representação de estado do Exemplo 1.4

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \quad , \quad y = \begin{bmatrix} -\sigma & -1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} x$$

que não é observável para $\sigma = 1$. No entanto, o sistema é controlável independentemente de σ, pois

$$\det(\mathrm{Ctrb}(A,b)) = \det \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -1$$

Exemplo II

Por outro lado, a representação em equações de estado na forma dual, dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \ , \ b = \begin{bmatrix} -\sigma \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ d = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

é observável independentemente de σ e não é controlável para $\sigma = 1$, pois

$$\det(\mathrm{Ctrb}(A,b)) = \det \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma \\ -1 & 2-\sigma \end{bmatrix} = \sigma(\sigma - 1)$$

$$\det(\mathrm{Obsv}(A,c)) = \det \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -1$$

Forma canônica controlável I

Propriedade 9 (Forma canônica controlável)

A representação

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

é denominada de forma canônica controlável, pois $\det\big(Ctrb(A,b)\big) \neq 0$ *para quaisquer valores de* α_k.

Prova: para $n = 4$, tem-se

$$\mathrm{Ctrb}(A,b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 \\ 0 & 1 & -\alpha_3 & -\alpha_2 + \alpha_3^2 \\ 1 & -\alpha_3 & -\alpha_2 + \alpha_3^2 & -\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3 - \alpha_3(\alpha_2 + \alpha_3^2) \end{bmatrix}$$

Forma canônica controlável II

cujo determinante é igual a 1. Para n qualquer, o determinante é 1 ou -1, pois

$$\det\big(\mathrm{Ctrb}(A,b)\big) = (-1)^{f[n]} \quad , \quad f[n] = \sum_{k=2}^{n+1} k \ = \frac{(n+3)n}{2}$$

Pode-se mostrar que inversa da matriz de controlabilidade é dada por

$$\big(\mathrm{Ctrb}(A,b)\big)^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Exemplo 1.12

O sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

está na forma canônica controlável, sendo

$$\mathrm{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(\mathrm{Ctrb}(A, b)) = -1$$

Forma canônica observável

Propriedade 10 (Forma canônica observável)

A representação de um sistema na forma

$$\dot{v} = Av \ , \ y = cv \quad , \quad \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} v \ , \ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} v$$

é denominada de forma canônica observável, pois $\det\big(Obsv(A,c)\big) \neq 0$ *para quaisquer valores de* α_k.

Por dualidade, essa propriedade é conseqüência da Propriedade 8.

Propriedade I

Propriedade 11

A realização mostrada na Figura 4 é a forma canônica controlável dada por ($m = 3$, $\alpha_m = 1$)

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_0 & \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 \end{bmatrix}, \; d = \begin{bmatrix} \beta_3 \end{bmatrix}$$

associada aos polinômios

$$D(p) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k \quad , \quad N(p) = \beta_3 D(p) + \bar{N}(p) \quad , \quad \bar{N}(p) = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{\beta}_k p^k$$

Propriedade II

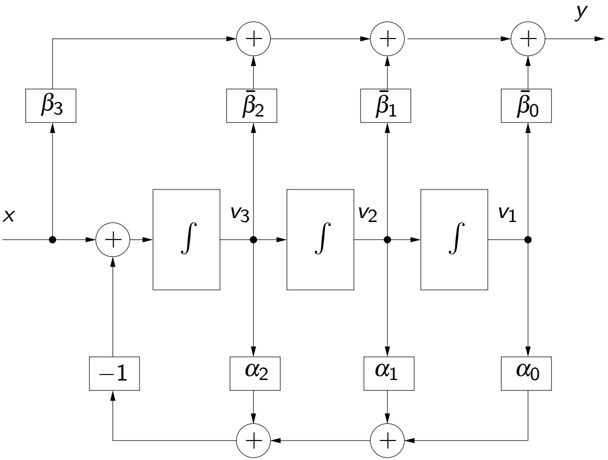

Figura : Realização na forma canônica controlável.

Propriedade III

Por construção, a realização possui (A, b) controlável. Se (A, c) for observável, então não há cancelamentos entre pólos e zeros.

Por outro lado, se não houver cancelamento entre as raízes de $N(p)$ e $D(p)$ (isto é, entre pólos e zeros), a realização é observável. Portanto, essa realização é sempre controlável e a observabilidade depende dos parâmetros α_k, β_k.

Note que cancelamentos entre pólos e zeros também implicam em cancelamentos entre $\bar{N}(p)$ e $D(p)$.

Exemplo 1.13

Considere a realização mostrada na Figura 4 com

$$\beta_3 = 0 \ , \ \beta_2 = 1 \ , \ \beta_1 = 3 \ , \ \beta_0 = 2 \quad , \quad \alpha_2 = 8 \ , \ \alpha_1 = 21 \ , \ \alpha_0 = 18$$

implicando em

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -18 & -21 & -8 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ c = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \ d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de observabilidade é dada por

$$\text{Obsv}(A,c) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -18 & -19 & -5 \\ 90 & 87 & 21 \end{bmatrix} \quad , \quad \det\big(\text{Obsv}(A,c)\big) = 0$$

De fato, os polinômios

$$N(p) = p^2 + 3p + 2 = (p+1)(p+2) \quad , \quad D(p) = p^3 + 8p^2 + 21p + 18 = (p+3)^2(p+2)$$

possuem a raiz -2 em comum.

Propriedade I

Propriedade 12

A realização mostrada na Figura 5 é a forma canônica observável dada por ($m = 3$, $\alpha_m = 1$)

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_0 \\ \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; d = \begin{bmatrix} \beta_3 \end{bmatrix}$$

associada aos polinômios

$$D(p) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k \quad , \quad N(p) = \beta_3 D(p) + \bar{N}(p) \quad , \quad \bar{N}(p) = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{\beta}_k p^k$$

Propriedade II

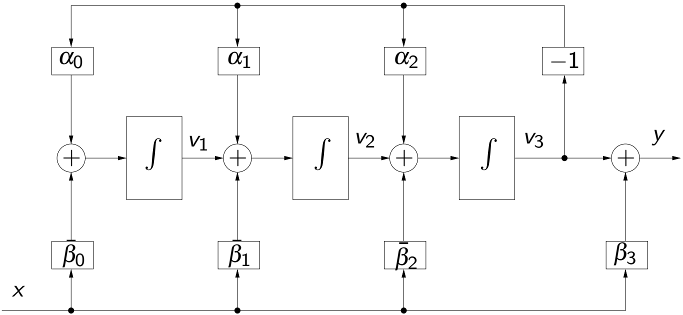

Figura : Realização na forma canônica observável.

Propriedade III

Por construção, a realização possui (A, c) observável. Se (A, b) for controlável, então não há cancelamentos entre pólos e zeros.

Por outro lado, se não houver cancelamento entre as raízes de $N(p)$ e $D(p)$ (isto é, entre pólos e zeros), a realização é controlável. Portanto, essa realização é sempre observável e a controlabilidade depende dos parâmetros α_k, β_k.

Exemplo I

Exemplo 1.14

Considere a realização mostrada na Figura 5 com

$$\beta_3 = 1 \ , \ \bar{\beta}_2 = 1 \ , \ \bar{\beta}_1 = 3 \ , \ \bar{\beta}_0 = 2 \quad , \quad \alpha_2 = 3 \ , \ \alpha_1 = -1 \ , \ \alpha_0 = -3$$

implicando em

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ d = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de controlabilidade é dada por

$$\mathrm{Ctrb}(A,b) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \det\big(\mathrm{Ctrb}(A,b)\big) = 0$$

Exemplo II

De fato, os polinômios

$$\bar{N}(p) = p^2 + 3p + 2 = (p+1)(p+2), \quad D(p) = p^3 + 3p^2 - p - 3 = (p-1)(p+1)(p+3)$$

possuem a raiz -1 em comum.

Decomposição canônica (modos não controláveis) I

Propriedade 13 (Decomposição canônica – modos não controláveis)

Considere o sistema

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx$$

e a transformação de similaridade $\bar{v} = Pv$*, com* P *não singular, que produz*

$$\dot{\bar{v}} = P\dot{v} = \underbrace{PAP^{-1}}_{\bar{A}}\bar{v} + \underbrace{Pb}_{\bar{b}}x \quad , \quad y = \underbrace{cP^{-1}}_{\bar{c}}\bar{v} + \underbrace{d}_{\bar{d}}x$$

Se a matriz de controlabilidade do sistema

$$Ctrb(A,b) = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

tem rank $r < n$*, então*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_r & \cdots & q_n \end{bmatrix}$$

Decomposição canônica (modos não controláveis) II

Propriedade 13 (cont.)

construída com r colunas linearmente independentes de $Ctrb(A, b)$ (e demais colunas arbitrárias, para garantir a existência de P^{-1}) leva o sistema para

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{c}_c & \bar{c}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

O subsistema de ordem r

$$\dot{\bar{v}}_c = \bar{A}_c \bar{v}_c + \bar{b}_c x$$
$$y = \bar{c}_c \bar{v}_c + \bar{d}x$$

é controlável e produz a mesma função de transferência que o sistema original. Os estados associados aos modos controláveis estão no vetor $\bar{v}_c \in \mathbb{R}^r$.

Decomposição canônica (modos não controláveis) III

Note que

$$A\begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_r & \cdots & q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_r & \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

ou seja, os vetores Aq_i, $i = 1, \ldots, r$ escrevem-se em função dos r primeiros vetores de P^{-1} (não dependem dos vetores extras $\{q_{r+1}, \ldots, q_n\}$). De maneira similar, $\bar{b}$ (representação de b na base $P^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_r & \cdots & q_n \end{bmatrix}$) não depende dos vetores extras $q_{r+1}, \ldots, q_n$. Além disso,

$$\mathrm{Ctrb}(\bar{A}, \bar{b}) = \begin{bmatrix} \bar{b}_c & \bar{A}_c \bar{b}_c & \cdots & \bar{A}_c^{n-1} \bar{b}_c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Ctrb}(\bar{A}_c, \bar{b}_c) & \bar{A}_c^{r} \bar{b}_c & \cdots & \bar{A}_c^{n-1} \bar{b}_c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

tem *rank* r (as colunas de $r+1$ a n são linearmente dependentes), que é o *rank* de $\mathrm{Ctrb}(\bar{A}_c, \bar{b}_c)$, indicando que o sistema de ordem r é controlável.

Decomposição canônica (modos não controláveis) IV

Como

$$(s\mathsf{I}-\bar{A})^{-1} = \begin{bmatrix} (s\mathsf{I}-\bar{A}_c) & -\bar{A}_{12} \\ 0 & (s\mathsf{I}-\bar{A}_{\bar{c}}) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (s\mathsf{I}-\bar{A}_c)^{-1} & (s\mathsf{I}-\bar{A}_c)^{-1}\bar{A}_{12}(s\mathsf{I}-\bar{A}_{\bar{c}})^{-1} \\ 0 & (s\mathsf{I}-\bar{A}_{\bar{c}})^{-1} \end{bmatrix}$$

tem-se que a função de transferência é dada por

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_c & \bar{c}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s\mathsf{I}-\bar{A}_c)^{-1} & (s\mathsf{I}-\bar{A}_c)^{-1}\bar{A}_{12}(s\mathsf{I}-\bar{A}_{\bar{c}})^{-1} \\ 0 & (s\mathsf{I}-\bar{A}_{\bar{c}})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{d} = \bar{c}_c(s\mathsf{I}-\bar{A}_c)^{-1}\bar{b}_c + \bar{d}$$

A decomposição canônica que separa os modos controláveis dos não controláveis é produzida pelo comando `ctrbf` do Matlab.

Propriedade 14 (Decomposição canônica – modos não observáveis)

É o caso dual da Propriedade 13. Se

$$\text{rank}\big(Obsv(A,c)\big) = r < n$$

a transformação de similaridade $\bar{v} = Pv$, com P não singular dada por

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \vdots & p_r & \vdots & p_n \end{bmatrix}'$$

construída com r linhas linearmente independentes de $Obsv(A,c)$ (e demais linhas arbitrárias, para garantir a existência de P^{-1}) leva o sistema (com estados associados aos modos observáveis no vetor $\bar{v}_o \in \mathbb{R}^r$) para

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_o \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_o \\ \bar{b}_{\bar{o}} \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{c}_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Decomposição canônica (modos não observáveis)

O subsistema de ordem r

$$\dot{\bar{v}}_o = \bar{A}_o \bar{v}_o + \bar{b}_o x$$
$$y = \bar{c}_o \bar{v}_o + \bar{d} x$$

é observável e produz a mesma função de transferência que o sistema original.

A decomposição canônica que separa os modos observáveis dos não observáveis é produzida pelo comando `obsvf` do Matlab.

Exemplo – Modos não observáveis

Exemplo 1.15 (Modos não observáveis)

Considere o sistema descrito por

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv, \; A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O sistema é não observável, pois

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(\text{Obsv}(A, c)) = 0$$

O *rank* de $\text{Obsv}(A, c)$ é igual a 1. Para

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; \hat{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \; \hat{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \; \hat{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo – Modos não observáveis II

tem-se

$$\text{Obsv}(\hat{A},\hat{c}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(\text{Obsv}(\hat{A},\hat{c})) = 0$$

Embora a matriz A tenha dois modos próprios $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, apenas um dos modos aparece na função de transferência

$$\frac{1}{s+3}$$

Exemplo – Modos não controláveis I

Exemplo 1.16 (Modos não controláveis)

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} x \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} v$$

cujo polinômio característico é

$$\Delta(p) = p^3 + 6p^2 + 11p + 6 = (p+1)(p+2)(p+3)$$

O sistema não é controlável, pois

$$\det(\mathrm{Ctrb}(A,b)) = \det \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -3 & 9 & -27 \\ 9 & -27 & 81 \end{bmatrix} = 0 \quad ,$$

$$rank(\mathrm{Ctrb}(A,b)) = 1$$

Exemplo – Modos não controláveis II

Utilizando o operador p, tem-se

$$v = (p\mathrm{I} - A)^{-1} b x = \frac{1}{p+3} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} x$$

Note que não é possível controlar individualmente os estados e que dois modos próprios não aparecem na equação diferencial.

Definindo a transformação

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\hat{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -20 & -6 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{b} = Pb = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{c} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo – Modos não controláveis III

Note que, no sistema transformado, foram separadas as parcelas controlável ($\hat{v}_1$, autovalor -3) e não controlável ($\hat{v}_2$ e $\hat{v}_3$, autovalores -1 e -2). Note também que os estados não controláveis formam um sistema autônomo independente, e a variável $\hat{v}_2$ influencia na equação de $\hat{v}_1$.

A matriz de controlabilidade do sistema transformado é

$$\text{Ctrb}(\hat{A},\hat{b}) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathit{rank}(\text{Ctrb}(\hat{A},\hat{b})) = 1$$

e a função de transferência é

$$\frac{7}{s+3}$$

Exemplo I

Exemplo 1.17

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 7 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} v$$

Os autovalores da matriz do sistema são -1, -2, 3 e 4 (matriz bloco triangular). Note que o sistema está na forma da decomposição canônica controlável, com os estados controláveis v_1 e v_2 (associados aos autovalores -1 e -2) e os não controláveis v_3 e v_4. Os modos não controláveis são 3 e 4, autovalores da submatriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & 7 \end{bmatrix}$$

A matriz de controlabilidade (*rank* 2) é dada por

$$\mathrm{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 7 \\ 1 & -3 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo II

e a de observabilidade, de *rank* igual a 4, por

$$\mathrm{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -49 & 27 \\ 10 & 11 & -323 & 147 \\ -22 & -23 & -1765 & 693 \end{bmatrix}$$

indicando que o sistema é observável. A função de transferência, que depende apenas da parte controlável e observável, é

$$\frac{2s+1}{s^2+3s+2}$$

Exemplo 1.18

Considere o sistema descrito pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad , \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Trata-se de um sistema observável e não controlável, pois

$$rank\big(\text{Ctrb}(A,b)\big) = rank\Big(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \Big) = 1 \quad , \quad rank\big(\text{Obsv}(A,c)\big) = rank\Big(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \Big) = 2$$

A transformação de similaridade que evidencia os modos não controláveis é

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{produzindo}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \end{bmatrix}$$

cuja função de transferência é dada por

$$\frac{9}{s-1}$$

Controlabilidade e Forma de Jordan

Propriedade 15 (Controlabilidade e Forma de Jordan)

Um sistema linear invariante no tempo com uma única entrada (A, b) *é controlável se e somente se sua forma de Jordan possuir apenas um bloco de Jordan associado a cada autovalor e todo elemento de* b *correspondente à última linha de cada bloco de Jordan for diferente de* 0*.*

Exemplo

Exemplo 1.19

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x$$

cuja matriz de controlabilidade é dada por

$$\mathrm{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} b_1 & \sigma b_1 \\ b_2 & \sigma b_2 \end{bmatrix}$$

O sistema possui dois blocos de Jordan de tamanho 1 associados ao autovalor σ. Note que o sistema é não controlável para quaisquer b_1, b_2 e σ. Por outro lado, o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x$$

é tal que

$$\mathrm{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} b_1 & \sigma b_1 + b_2 \\ b_2 & \sigma b_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \det\big(\mathrm{Ctrb}(A, b)\big) = -b_2^2$$

indicando que o sistema é controlável se e somente se $b_2 \neq 0$.

Observabilidade e Forma de Jordan

Propriedade 16 (Observabilidade e Forma de Jordan)

Um sistema linear invariante no tempo com uma única saída (A, c) é observável se e somente se sua forma de Jordan possuir apenas um bloco de Jordan associado a cada autovalor e todo elemento de c correspondente à primeira coluna de cada bloco de Jordan for diferente de 0.

Exemplo 1.20

Retomando o Examplo 1.19, com a matriz de saída $c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ \sigma c_1 & \sigma c_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \det\big(\text{Obsv}(A, c)\big) = 0$$

indicando que o sistema não é observável. Por outro lado,

$$A = \begin{bmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ \sigma c_1 & c_1 + \sigma c_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \det\big(\text{Obsv}(A, c)\big) = c_1^2$$

é observável se e somente se $c_1 \neq 0$.