Livro (e-book): Linearidade em Sinais e Sistemas, Ivanil S. Bonatti, Amauri Lopes, Pedro L. D. Peres, Cristiano M. Agulhari,

Ed. Blucher, SP, 2015, 1ed., ISBN: 9788521208921.

Prof. Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Transformada Z

Definição 1 (Transformada Z)

A transformada Z da sequência $x[n]$ é dada por

$$X(z) = \mathscr{Z}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}$$

para $z \in \Omega_x$, isto é, conjunto dos $z \in \mathbb{C}$ (complexos) para os quais a soma é finita.

Alguns autores definem a transformada Z com a soma no intervalo $k \in [0, +\infty)$, por tratarem exclusivamente de sinais à direita (isto é, sinais que são nulos para $k < 0$). Nesse contexto, as vezes é também chamada de transformada Z unilateral.

Transformada Z da Função Impulso

Propriedade 1 (Transformada Z da Função Impulso)

$$\mathscr{Z}\{\delta[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k] z^{-k} = 1 \quad , \quad \Omega_\delta = \mathbb{C}$$

Exemplo:

$$\mathscr{Z}\{\delta[n-m]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k-m] z^{-k} = z^{-m} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

sendo $\mathbb{Z}_+$ o conjunto dos números inteiros positivos. O domínio da transformada é o conjunto dos complexos, com exceção de $z = 0$.

Exemplo:

$$\mathscr{Z}\{\delta[n+m]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k+m] z^{-k} = z^{m} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

e o domínio é o conjunto dos complexos, com exceção de $|z| \to +\infty$.

Propriedade da soma

Propriedade 2 (Soma)

Se o limite

$$\lim_{z\to 1} \mathscr{Z}\{x[n]\}$$

é finito e único, então

$$\lim_{z\to 1} \mathscr{Z}\{x[n]\} = \lim_{m\to +\infty} \sum_{k=-\infty}^{m} x[k]$$

Portanto, se

$$z = 1 \in \Omega_x$$

então

$$\mathscr{Z}\{x[n]\}\Big|_{z=1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]$$

Soma Geométrica

Propriedade 3 (Soma Geométrica)

$$\sum_{k=0}^{m} a^k = \frac{1-a^{m+1}}{1-a} \quad , \quad a \in \mathbb{C} \quad ; \quad se \;\; |a| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$$

pois

$$\sum_{k=0}^{m} a^k - a\sum_{k=0}^{m} a^k = 1 - a^{m+1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{m} a^k = \frac{1-a^{m+1}}{1-a}$$

Propriedade

Propriedade 4 (Transformada Z de $x[n] = a^n u[n]$)

$$X(z) = \mathscr{Z}\{x[n]\} = \mathscr{Z}\{a^n u[n]\} = \sum_{k=0}^{+\infty} (a/z)^k = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a},$$

$$\Omega_x = \{z \in \mathbb{C}, |z| > |a|\}$$

Note que o domínio de existência Ω_x é o exterior do círculo de raio $|a|$ centrado na origem e, portanto, o polo (isto é, a raiz $z = a$ do denominador) não pertence ao domínio.

Exemplo:

$$\mathscr{Z}\{u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{-n}u[n] = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad , \quad \Omega_u = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

Exemplo:

$$x[n] = \exp(j\beta n)u[n] = \big(\exp(j\beta)\big)^n u[n] \quad , \quad \beta > 0$$

cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{z}{z-\exp(j\beta)} \quad , \quad \Omega_x = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

Propriedade

Propriedade 5

$$\mathscr{Z}\{x[n] = -a^n u[-n-1]\} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n z^{-n} u[-n-1] = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (z/a)^{-n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} (z/a)^n = \frac{-(z/a)}{1-(z/a)} = \frac{z}{z-a}$$

$$\Omega_x = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |a|\}$$

Observe que a expressão da transformada Z é a mesma da transformada apresentada na Propriedade anterior, porém o domínio de convergência é o interior do círculo de raio $|a|$ centrado na origem.

Linearidade

Propriedade 6 (Linearidade)

$$\mathscr{Z}\{x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]\} = a\mathscr{Z}\{x_1[n]\} + b\mathscr{Z}\{x_2[n]\} \quad , \quad \Omega_x = \Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$$

ou seja, a transformada Z é linear e o domínio de convergência é (no mínimo) a interseção dos domínios.

Exemplo:

$$x[n] = a^n\big(u[n] - u[n-m]\big) \ , \ m \in \mathbb{Z}_+$$

$$\mathscr{Z}\{x[n]\} = \sum_{k=0}^{m-1} a^k z^{-k} = \frac{1-(a/z)^m}{1-(a/z)} = \frac{1}{z^{m-1}} \frac{z^m - a^m}{z-a}$$

Observe, por exemplo, usando a regra de l'Hôpital que a transformada é finita quando $z \to a$, implicando que a não é um polo de $X(z)$. O domínio da transformada é o conjunto dos complexos exceto $z = 0$.

Linearidade

Exemplo:

$$x[n] = 2^{n+1}\cos(3n)u[n] = \big(2\exp(j3)\big)^n u[n] + \big(2\exp(-j3)\big)^n u[n]$$

$$X(z) = \frac{z}{z - 2\exp(j3)} + \frac{z}{z - 2\exp(-j3)} \quad , \quad \Omega_x = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$$

Exemplo

$$x[n] = a^{|n|} = a^{-n}u[-n-1] + a^{n}u[n] \Rightarrow \mathscr{Z}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^{-k}z^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a^{k}z^{-k}$$

O segundo termo converge para $\dfrac{z}{z-a}$, $|z| > |a|$ e o primeiro termo produz

$$(az)\sum_{k=-\infty}^{-1} a^{-k-1}z^{-k-1} = (az)\sum_{k=-\infty}^{0}(az)^{-k} = (az)\sum_{k=0}^{+\infty}(az)^{k} = \frac{az}{1-az} \quad , \quad |z| < |1/a|$$

Para $|a| > 1$, não há interseção entre as regiões e portanto a transformada Z não existe. De fato, a série $a^{|n|}$, para $|a| > 1$, diverge para $n \to -\infty$ e para $n \to +\infty$.

Para $|a| < 1$, a transformada é dada por

$$X(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-1/a}$$

e o domínio da transformada é a coroa circular centrada na origem dado por $|a| < |z| < \frac{1}{|a|}$

Domínio da Transformada Z

Propriedade 7 (Domínio da Transformada Z)

- *O que determina o domínio da transformada Z de uma função* $x[n]$ *é a convergência da soma que define a transformada* $\mathscr{Z}\{x[n]\}$*, isto é, o domínio é o conjunto de valores de* z *para os quais a soma é finita.*
- *Os polos (valores de* z *para os quais a função tende para infinito; em geral, são as raízes do denominador) não pertencem ao domínio.*
- *O domínio não pode ser obtido apenas a partir da expressão da transformada* $X(z)$*. Por exemplo, a transformada Z do degrau é dada por* $\frac{z}{z-1}$ *e existe para todo* $z \neq 1$*. No entanto, o domínio é a região* $|z| > 1$*.*
- *O domínio é definido por restrições sobre o módulo de* z*.*
- *Se* $x[n]$ *tem duração finita, o domínio* Ω_x *é todo o plano complexo, exceto (possivelmente)* $z = 0$ *e/ou* $|z| \to +\infty$*.*
- *Se* $x[n] = 0$ *para* $n < m$, $m \in \mathbb{Z}$ *(sinal à direita), o domínio (se existir) é o exterior do menor círculo que contém todos os polos.*
- *Se* $x[n] = 0$ *para* $n > m$, $m \in \mathbb{Z}$ *(sinal à esquerda), o domínio (se existir) é o interior do maior círculo que não contém nenhum polo.*

Propriedade

Propriedade 8 (Transformada Z de $x[n] = a^n$)

$$X(z) = \mathscr{Z}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (a/z)^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} (a/z)^k$$

Para $|z| \leq |a|$, o primeiro termo diverge e, para $|z| \geq |a|$, o segundo termo diverge. Portanto, não existe a transformada Z de $x[n] = a^n$ (a soma diverge em todo $z \in \mathbb{C}$).

Teorema da Convolução

Teorema 1 (Teorema da Convolução)

A transformada Z da convolução de dois sinais é o produto das transformadas, ou seja,

$$\mathscr{Z}\{x[n] = x_1[n] * x_2[n]\} = \mathscr{Z}\{x_1[n]\}\mathscr{Z}\{x_2[n]\} \quad , \quad \Omega_x = \Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$$

Prova:

$$\mathscr{Z}\{x_1[n] * x_2[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] x_2[k-n] \right) z^{-k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] z^{-n} x_2[k-n] z^{-(k-n)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] z^{-n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2[k-n] z^{-(k-n)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] z^{-n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_2[m] z^{-m} = X_1(z) X_2(z)$$

Exemplo:

$$y[n] = x[n] * x[n] \quad , \quad x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= (\delta[n-1] + \delta[n+1]) * (\delta[n-1] + \delta[n+1]) \\ &= \delta[n-2] + \delta[n] + \delta[n] + \delta[n+2] = \delta[n-2] + 2\delta[n] + \delta[n+2] \end{aligned}$$

Ou, por transformada Z

$$\mathscr{Z}\{y[n]\} = (z^{-1} + z)(z^{-1} + z) = z^{-2} + 2 + z^2$$

Operador Derivada

Propriedade 9 (Operador Derivada)

$$\mathscr{Z}\{y[n] = nx[n]\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)X(z) \quad , \quad \Omega_y = \Omega_x \quad \textit{pois}$$

$$\frac{d}{dz}\mathscr{Z}\{x[n]\} = \frac{d}{dz}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}\right\} = -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx[n]z^{-n} \quad \Rightarrow$$

$$-z\frac{d}{dz}\mathscr{Z}\{x[n]\} = \mathscr{Z}\{nx[n]\}$$

$$\mathscr{Z}\{y[n] = n^2x[n]\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^2 X(z) \quad , \quad \Omega_y = \Omega_x \quad \textit{pois}$$

$$\mathscr{Z}\{n^2x[n]\} = \mathscr{Z}\{nv[n]\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)V(z) = \left(-z\frac{d}{dz}\right)\left(-z\frac{d}{dz}\right)X(z)$$

Generalizando,

$$\mathscr{Z}\{y[n] = n^m x[n]\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^m X(z) \quad , \quad \Omega_y = \Omega_x$$

Deslocamento à Direita (atraso)

Propriedade 10 (Deslocamento à Direita (atraso))

$$\mathscr{Z}\{y[n] = x[n-m]u[n-m]\} = z^{-m}\mathscr{Z}\{x[n]u[n]\} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+ \, , \, \Omega_y = \Omega_x$$

pois

$$\mathscr{Z}\{x[n-m]u[n-m]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k-m]u[k-m]z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[k]z^{-(k+m)} = z^{-m}\mathscr{Z}\{x[n]u[n]\}$$

Exemplo:

$$\mathscr{Z}\{(-a)^{n-1}u[n-1]\} = z^{-1}\mathscr{Z}\{(-a)^n u[n]\} = z^{-1}\frac{z}{z+a} = \frac{1}{z+a} \quad , \quad |z| > |a|$$

Deslocamento à Esquerda (avanço)

Propriedade 11 (Deslocamento à Esquerda (avanço))

$$\mathscr{Z}\{x[n+1]u[n]\} = z\big(\mathscr{Z}\{x[n]u[n]\} - x[0]\big)$$

pois

$$\mathscr{Z}\{x[n+1]u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n+1]u[n]z^{-n} = z\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n+1]u[n]z^{-(n+1)}$$

$$= z\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]u[n-1]z^{-n} = z\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]u[n]z^{-n} - x[0]\Big)$$

Observe que, se $x[0]=0$*, multiplicar a transformada por* z *equivale a deslocar* $x[n]$ *para* $x[n+1]$

Generalização

Propriedade 12

$$\mathscr{Z}\{x[n+2]u[n]\} = z^2\big(\mathscr{Z}\{x[n]u[n]\} - x[0] - z^{-1}x[1]\big)$$

pois

$$y[n] = x[n+1]u[n] \quad \Rightarrow \quad y[0] = x[1] \ , \ y[n+1] = x[n+2]u[n+1]$$

$$\mathscr{Z}\{x[n+2]u[n]\} = \mathscr{Z}\{y[n+1]u[n]\} = z\big(\mathscr{Z}\{y[n]u[n]\} - y[0]\big) =$$

$$= z\big(\mathscr{Z}\{x[n+1]u[n]\} - x[1]\big) = z\Big(z\big(\mathscr{Z}\{x[n]u[n]\} - x[0]\big) - x[1]\Big)$$

Generalizando,

$$\mathscr{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m\left(\mathscr{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\right) \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

Exemplo:

$$\mathscr{Z}\{\underbrace{(n+1)a^n}_{x[n+1]}u[n]\} = z\left(\mathscr{Z}\{\underbrace{na^{n-1}}_{x[n]}u[n]\} - \underbrace{(na^{n-1})\Big|_{n=0}}_{x[0]=0}\right)$$

Utilizando a Propriedade da derivada, tem-se

$$\mathscr{Z}\{na^{n-1}u[n]\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)\mathscr{Z}\{a^{n-1}u[n]\}$$

Como

$$\mathscr{Z}\{a^{n-1}u[n]\} = \frac{1}{a}(1-az^{-1})^{-1} = \frac{1}{a}\left(\frac{z}{z-a}\right)$$

tem-se

$$\mathscr{Z}\{na^{n-1}u[n]\} = -z\left(\frac{1}{a}(-1)(1-az^{-1})^{-2}az^{-2}\right) = (1-az^{-1})^{-2}z^{-1} = \frac{z}{(z-a)^2}$$

Portanto,

$$\mathscr{Z}\{(n+1)a^n u[n]\} = \mathscr{Z}\left\{\left(\begin{array}{c} n+1 \\ 1 \end{array}\right) a^n u[n]\right\} = (1-az^{-1})^{-2} = \frac{z^2}{(z-a)^2} \quad , \quad |z| > |a|$$

sendo a combinação de n termos m a m dada por

$$\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad , \quad 0 \leq m \leq n \ , \ m, n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Exemplo

$$\mathscr{Z}\left\{\left(\begin{array}{c} n+2 \\ 2 \end{array}\right) a^n u[n]\right\} = \mathscr{Z}\Big\{\underbrace{\frac{(n+2)(n+1)}{2}a^n}_{x[n+1]} u[n]\Big\} = z\ \mathscr{Z}\Big\{\underbrace{\frac{(n+1)n}{2}a^{n-1}}_{x[n],\ x[0]=0} u[n]\Big\} =$$

$$= z\left(-z\frac{d}{dz}\right)\mathscr{Z}\Big\{\frac{(n+1)}{2}a^{n-1}u[n]\Big\} = \frac{z}{2a}\left(-z\frac{d}{dz}\right)(1-az^{-1})^{-2}$$

pelo resultado do exemplo anterior. Portanto,

$$\mathscr{Z}\left\{\left(\begin{array}{c} n+2 \\ 2 \end{array}\right) a^n u[n]\right\} = (1-az^{-1})^{-3} = \frac{z^3}{(z-a)^3} \quad , \quad |z| > |a|$$

O mesmo resultado pode ser obtido a partir das transformadas Z

$$\mathscr{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a}, \quad \mathscr{Z}\{na^n u[n]\} = \frac{az}{(z-a)^2}, \quad \mathscr{Z}\{n^2 a^n u[n]\} = \frac{az^2 + a^2 z}{(z-a)^3}$$

$$\mathscr{Z}\left\{\left(\begin{array}{c} n+1 \\ 1 \end{array}\right) a^n u[n]\right\} = \mathscr{Z}\{(n+1)a^n u[n]\} = \frac{az}{(z-a)^2} + \frac{z}{z-a} = \frac{z^2}{(z-a)^2}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}\left\{\left(\begin{array}{c} n+2 \\ 2 \end{array}\right) a^n u[n]\right\} &= \mathscr{Z}\left\{\left(\frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 1\right) a^n u[n]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{az^2 + a^2 z}{(z-a)^3}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{az}{(z-a)^2}\right) + \frac{z}{z-a} = \frac{z^3}{(z-a)^3} \end{aligned}$$

Combinatória

Propriedade 13 (Combinatória)

Generalizando os exemplos anteriores, tem-se

$$\mathscr{Z}\left\{\left(\begin{array}{c} n+m \\ m \end{array}\right) a^n u[n]\right\} = (1-az^{-1})^{-(m+1)} = \frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}} \quad , \quad m \in \mathbb{N} \quad , \quad |z| > |a|$$

Propriedade 14 (Combinatória com Deslocamento)

$$\mathscr{Z}\left\{\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right) a^{n-m}u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}} \quad , \quad |z| > |a| \ , \ m \in \mathbb{N}$$

pois, aplicando a Propriedade atraso na Propriedade combinatória, tem-se

$$z^{-m}\mathscr{Z}\left\{\left(\begin{array}{c} n+m \\ m \end{array}\right) a^{n}u[n]\right\} = \mathscr{Z}\left\{\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right) a^{n-m}u[n-m]\right\}$$

$$= \frac{z^{-m}}{(1-az^{-1})^{m+1}} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}}$$

Combinatória com Deslocamento

Observe que a combinação de n elementos m a m não estaria definida para $n < m$, mas, para $n \geq 0$, tem-se

$$\binom{n}{m} = \frac{1}{m!}(n-m+1)\cdots n$$

que é igual a zero para $n < m$. Assim,

$$\mathscr{Z}\left\{ \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) a^{n-m} u[n-m] \right\} = \mathscr{Z}\left\{ \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) a^{n-m} u[n] \right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}} \quad ,$$

$$|z| > |a| \ , \ m \in \mathbb{N}$$

Propriedade 15 (Reversão no Tempo)

$$y[n] = x[-n] \quad \Rightarrow \quad Y(z) = X(z^{-1}) \quad , \quad \Omega_y = \{z^{-1} \in \Omega_x\}$$

pois

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} \quad \Rightarrow \quad X(z^{-1}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[-k]z^{-k} = \mathscr{Z}\{y[n]\}$$

Exemplo: A transformada Z de $x[n] = \rho^n u[-n]$ pode ser obtida definindo-se

$$y[n] = x[-n] = \rho^{-n}u[n] \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \frac{z}{z-\rho^{-1}} \quad , \quad |z| > \rho^{-1}$$

implicando em

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{z^{-1}-\rho^{-1}} = \frac{\rho}{\rho - z} \quad , \quad |z| < \rho$$

De fato, pela definição de transformada Z tem-se

$$\mathscr{Z}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho^k u[-k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (z/\rho)^k = \frac{1}{1-z/\rho} \quad , \quad |z/\rho| < 1$$

Propriedade 16 (Valor Inicial)

Considere $x[n]$ um sinal à direita de $n=0$, isto é, $x[n]=x[n]u[n]$ com $x[0]$ finito, cuja transformada $X(z)$ possui domínio Ω_x não vazio. Então,

$$x[0]=\lim_{|z|\to+\infty} X(z)$$

Prova: Como $x[n]=0$ para $n<0$, o domínio Ω_x é o exterior de um círculo de raio limitado (para $X(z)$ racional, o domínio é o exterior do círculo de menor raio que contém os polos), e portanto $|z|\to+\infty$ pertence a Ω_x.

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]u[n]z^{-n}=x[0]+\sum_{n=1}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{|z|\to+\infty} X(z)=x[0]$$

Observe que se $X(z)$ for racional (razão de dois polinômios em z), a ordem do numerador é necessariamente menor ou igual à do denominador para que o limite exista. Nesse caso, $X(z)$ é denominada função própria.

Propriedade 17 (Valor Final)

Considere $X(z)$ *com domínio* $|z| > \rho$, $0 < \rho \leq 1$. *Se* $\lim_{m\to+\infty} x[m]$ *é finito, então*

$$\lim_{m\to+\infty} x[m] = \lim_{z\to 1} (z-1)X(z)$$

Observe que, como $(z-1)X(z)$ deve ser finito em $z=1$, $X(z)$ pode no máximo ter um polo em $z=1$. Além disso, para que o limite $\lim_{m\to+\infty} x[m]$ seja finito, os demais polos têm que estar no interior do círculo unitário.
Note também que $z=1$ não necessariamente precisa pertencer ao domínio, como por exemplo na transformada Z do degrau unitário, com

$$\mathscr{Z}\{u[n]\} = \frac{z}{z-1}, |z| > 1, \quad \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{z-1} = 1 = \lim_{m\to+\infty} u[m]$$

Exemplo: Considere

$$X(z) = \frac{z+1}{z+1/3} \quad , \quad |z| > 1/3$$

$$x[0] = \lim_{|z|\to+\infty} X(z) = 1, \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] = \lim_{z\to 1} X(z) = 3/2$$

$$\lim_{n\to+\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)(z+1)}{z+1/3} = 0$$

Transformada Inversa

Propriedade 18 (Transformada Inversa)

- *A transformada inversa da transformada Z de funções racionais pode ser computada pelo algoritmo de Briot-Ruffini de divisão de polinômios.*
- *A transformada inversa da transformada Z cujo domínio é o exterior de um círculo é uma sequência à direita.*
- *A transformada inversa da transformada Z cujo domínio é o interior de um círculo é uma sequência à esquerda.*
- *A transformada inversa da transformada Z cujo domínio é uma coroa circular centrada na origem é uma sequência que existe à esquerda e à direita do zero.*
- *A transformada inversa da transformada Z cujo domínio é todo o plano complexo, exceto possivelmente ou* $z = 0$*, ou* $|z| \to +\infty$ *ou ambos, é dada por uma sequência de duração finita.*

Exemplo de Transformada inversa

Exemplo: Considere

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \quad , \quad |z| > |a|$$

Então

$$\begin{array}{ll}
z & \angle z - a \\
z - a & 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots \\
\hline
\quad a & \\
\quad a - a^2 z^{-1} & \\
\hline
\qquad a^2 z^{-1} &
\end{array}$$

$$X(z) = \frac{z}{z-a} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots \quad \Rightarrow \quad x[n] = a^n u[n]$$

pois, comparando $X(z)$ com a definição de transformada Z, obtêm-se os termos $x[n]$ (identidade de polinômios).
Note que a série converge apenas para $|z| > |a|$.

Exemplo de Transformada inversa

Exemplo: Considere

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \quad , \quad |z| < |a|$$

Então

$$\begin{array}{l|l}
z & -a+z \\
z - a^{-1}z^2 & -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 + \cdots \\
\hline
\quad a^{-1}z^2 & \\
\quad a^{-1}z^2 - a^{-2}z^3 & \\
\hline
\qquad a^{-2}z^3 &
\end{array}$$

$$X(z) = \frac{z}{-a+z} = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 + \cdots \quad \Rightarrow \quad x[n] = -a^n u[-n-1]$$

e, neste caso, a série converge apenas para $|z| < |a|$.

Exemplo de Transformada inversa

$$X(z) = \frac{2z^2 - 5z}{(z-2)(z-3)} = \frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-3} \quad , \quad |z| > 3$$

Para o domínio em questão, tem-se

$$x[n] = (2^n + 3^n)u[n]$$

Note que a Propriedade da soma não se aplica, pois $z = 1$ não pertence ao domínio. De fato, $X(1) = -3/2$ e a soma diverge.

A Propriedade do valor inicial é verificada, pois

$$X(+\infty) = 2 \quad \text{e} \quad x[0] = 2$$

Neste caso, também não se aplica a Propriedade do valor final, pois o domínio não verifica a hipótese $|z| > \rho$ com $\rho \leq 1$.

Exemplo de Transformada inversa (frações parciais)

A transformada Z inversa de funções racionais próprias $X(z)$ com domínio no exterior de um círculo (séries à direita) pode ser obtida pela Propriedade combinatória com deslocamento por meio da expansão em frações parciais de $X(z)/z$ na variável z.

Exemplo: Considere $\rho \neq 1$ e $Y(z)$ dado por

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-\rho)(z-1)} \quad , \quad |z| > \max\{|\rho|, 1\}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-\rho)(z-1)} = \frac{a}{z-\rho} + \frac{b}{z-1}, \qquad a = -\frac{\rho}{1-\rho} \ , \ b = \frac{1}{1-\rho}$$

Usando a Propriedade combinatória com deslocamento, tem-se

$$y[n] = a\rho^n u[n] + bu[n] = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} u[n]$$

Frações parciais – polos múltiplos

Exemplo: Para a transformada $X(z)$ dada por

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)^3} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{(z-1)^2} + \frac{a_3}{(z-1)^3} \quad , \quad |z| > 1$$

tem-se $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ e $a_3 = 1$. Portanto,

$$x[n] = \left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right) u[n] + \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right) u[n] = \frac{n(n+1)}{2} u[n]$$