Livro (e-book): Linearidade em Sinais e Sistemas, Ivanil S. Bonatti, Amauri Lopes, Pedro L. D. Peres, Cristiano M. Agulhari,

Ed. Blucher, SP, 2015, 1ed., ISBN: 9788521208921.

Prof. Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Transformada Z Aplicada a Probabilidade

A transformada Z é um operador matemático eficiente no tratamento de variáveis aleatórias discretas, como por exemplo nas distribuições de Bernoulli, binomial, geométrica, Poisson, Erlang, etc.

Considere a sequência enumerável $p[k]$ de escalares reais (positivos ou nulos) tal que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k] = 1$$

na qual, freqüentemente, $p[k] = 0$ para $k = -1, -2, -3, \ldots$

Definição 1 (Variável Aleatória Discreta)

É uma função $\mathbb{X}$ *à qual está associada uma distribuição de probabilidade*

$$\mathrm{Pr}\{\mathbb{X} = k\} = p[k] \geq 0 \; ; \; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k] = 1$$

Definição 2 (Esperança Matemática)

$$\mathscr{E}\{f(\mathbb{X})\} = \sum_k f(k)p[k]$$

Definição 3 (Momento de ordem m)

$$\mathscr{E}\{\mathbb{X}^m\} = \sum_k k^m p[k] \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

Definição 4 (Média)

$$\bar{x} = \mathscr{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k kp[k]$$

ou seja, a média é o momento de primeira ordem.

Definição 5 (Variância)

$$\sigma_{\mathbb{X}}^2 = \sum_k (k-\bar{x})^2 p[k]$$

Propriedade

Propriedade 1

A variância da variável aleatória $\mathbb{X}$ é igual ao momento de segunda ordem menos o momento de primeira ordem ao quadrado, ou seja,

$$\sigma_{\mathbb{X}}^2 = \mathscr{E}\{\mathbb{X}^2\} - \mathscr{E}\{\mathbb{X}\}^2$$

pois

$$\sum_k (k-\bar{x})^2 p[k] = \sum_k k^2 p[k] - 2\bar{x}\sum_k kp[k] + \bar{x}^2 \sum_k p[k] = \mathscr{E}\{\mathbb{X}^2\} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

Exemplo – fila M/M/1

Exemplo 1.1

Considere a equação a diferenças de primeira ordem com $0 < \rho < 1$ que descreve a cadeia markoviana da fila M/M/1 (chegadas e serviços com taxas independentes entre si que dependem apenas do estado da cadeia, um servidor e fila de espera não limitada) dada por $\mu p[n+1] = \lambda p[n]$,

$$\Rightarrow \quad p[n+1] = \rho p[n] \ , \quad n \in \mathbb{N} \ , \quad \rho = \lambda/\mu \quad ; \quad p[n] = 0 \ , \ n < 0 \quad , \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p[n] = 1$$

Sendo λ a taxa de chegadas e μ a taxa de serviços. Por substituição sistemática, tem-se

$$p[1] = \rho p[0] \ ; \quad p[2] = \rho p[1] = \rho^2 p[0] \ ; \quad p[3] = \rho p[2] = \rho^3 p[0] \ ; \quad \ldots \ ; \quad p[n] = \rho^n p[0]$$

Como $\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}$, tem-se

$$p[n] = (1-\rho)\rho^n u[n] \qquad (u[n] = \text{função degrau})$$

que é a distribuição geométrica. Observe que $p[0] = 1-\rho$ é a probabilidade do sistema estar vazio (servidor desocupado na teoria de filas).

Exemplo – Bernoulli

Exemplo 1.2 (Bernoulli)

$$\Pr\{\mathbb{X}=1\}=p>0 \quad , \quad \Pr\{\mathbb{X}=0\}=1-p=q>0$$

A variável aleatória de Bernoulli modela processos com duas possibilidades; por exemplo, probabilidade de um servidor estar livre ou ocupado.

$$\mathscr{E}\{\mathbb{X}\}=\sum_k kp[k]=1p+0(1-p)=p \quad , \quad \mathscr{E}\{\mathbb{X}^2\}=\sum_k k^2p[k]=1p+0(1-p)=p$$

$$\sigma_{\mathbb{X}}^2=\mathscr{E}\{\mathbb{X}^2\}-\mathscr{E}\{\mathbb{X}\}^2=p(1-p)=pq$$

Independência

Definição 6 (Independência)

Duas variáveis aleatórias discretas são independentes se a probabilidade conjunta for igual ao produto das probabilidades, isto é,

$$\Pr\{\mathbb{X}=x,\mathbb{Y}=y\}=\Pr\{\mathbb{X}=x\}\Pr\{\mathbb{Y}=y\}$$

Propriedade 2 (Independência)

$$\Pr\{\mathbb{X}=x,\mathbb{Y}=y\}=\Pr\{\mathbb{X}=x\}\Pr\{\mathbb{Y}=y\} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{E}\{f(\mathbb{X})g(\mathbb{Y})\}=\mathscr{E}\{f(\mathbb{X})\}\mathscr{E}\{g(\mathbb{Y})\}$$

pois

$$\mathscr{E}\{f(\mathbb{X})g(\mathbb{Y})\}=\sum_k\sum_m f(k)g(m)\Pr\{\mathbb{X}=k,\mathbb{Y}=m\}=$$

$$=\sum_k f(k)\Pr\{\mathbb{X}=k\}\sum_m g(m)\Pr\{\mathbb{Y}=m\}$$

Transformada Z

Definição 7 (Transformada Z)

A transformada Z da série $p[n]$ é dada por[a]

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \mathscr{Z}\{p[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k]z^k$$

[a] Note que a transformada Z é definida com z^k (e não z^{-k}) para ficar de acordo com a maior parte dos livros de probabilidade. Duas consequências importantes disso são: a região de convergência para sequências à direita é o interior de um círculo (e não o exterior), e na Propriedade do Operador Derivada não aparece o sinal negativo.

Propriedade 3

$$\mathscr{Z}\{p[n]\} = \mathscr{E}\{z^{\mathbb{X}}\} \quad \textit{pois}$$

$$f(\mathbb{X}) = z^{\mathbb{X}} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{E}\{f(\mathbb{X})\} = \sum_k f(k)\,\Pr\{\mathbb{X} = k\} = \sum_k z^k p[k] = \mathscr{Z}\{p[n]\}$$

Exemplo

Exemplo 1.3

A transformada Z de uma variável aleatória constante igual a m, isto é,

$$\Pr\{\mathbb{X} = m\} = 1 \quad , \quad p[n] = \delta[n-m]$$

é dada por

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k-m] z^k = z^m$$

Exemplo 1.4

Seja $\mathbb{X}$ a variável aleatória que descreve o número de elementos na fila M/M/1 do Exemplo 1.1. A distribuição de probabilidade é dada por

$$p[n] = (1-\rho)\rho^n u[n] \quad , \quad 0 < \rho < 1.$$ A transformada Z de $p[n]$ é dada por

$$G_{\mathbb{X}}(z) = (1-\rho)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\rho z)^k u[k] = \frac{1-\rho}{1-\rho z} \quad , \quad |z| < \frac{1}{\rho}$$

Observe que a divisão dos polinômios da transformada Z produz a função inversa, isto é, a sequência $p[n]$.

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z} = (1-\rho)(1+\rho z+\rho^2 z^2+\cdots)$$

Soma

Propriedade 4 (Soma)

$$\mathscr{Z}\{p[n]\}\Big|_{z=1} = G_{\mathbb{X}}(1) = \sum_k p[k] = 1$$

Note que esta propriedade pode ser usada para testar eventuais erros nas expressões das transformadas Z das distribuições de probabilidade.

Propriedade 5 (Operador Derivada)

$$\left(\frac{zd}{dz}\right)^m \mathscr{Z}\{p[n]\} = \mathscr{Z}\{n^m p[n]\} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

pois

$$z\frac{d}{dz}\mathscr{Z}\{p[n]\} = z\sum_k kz^{k-1}p[k] = \sum_k kp[k]z^k = \mathscr{Z}\{np[n]\}$$

e a aplicação recorrente do operador $\left(\frac{zd}{dz}\right)$ *prova a propriedade.*

Momentos

Propriedade 6 (Momentos)

$$\mathscr{E}\{\mathbb{X}^m\} = \left(\frac{zd}{dz}\right)^m \mathscr{Z}\{p[n]\}\Big|_{z=1} = \mathscr{Z}\{n^m p[n]\}\Big|_{z=1} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

Esta propriedade pode ser usada para o cálculo dos momentos de ordem m.

Propriedade 7 (Variância)

$$\sigma_{\mathbb{X}}^2 = \left(\frac{zd}{dz}\right)^2 \mathscr{Z}\{p[n]\}\Big|_{z=1} - \left(\left(\frac{zd}{dz}\right) \mathscr{Z}\{p[n]\}\Big|_{z=1}\right)^2$$

Série de Taylor

Propriedade 8 (Série de Taylor)

sequências $p[n]$ à direita do zero podem ser calculadas a partir da série de Taylor de $G_{\mathbb{X}}(z)$ em $z = 0$, pois

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} G_{\mathbb{X}}(z)\Big|_{z=0} z^n \quad \Rightarrow \quad p[n] = \frac{G_{\mathbb{X}}^{(n)}(0)}{n!}$$

Exemplo

Exemplo 1.5

Considere novamente a variável aleatória de Bernoulli do Exemplo 1.2, para a qual

$$\Pr\{\mathbb{X}=1\}=p>0\ ;\ \Pr\{\mathbb{X}=0\}=1-p=q>0 \quad \Rightarrow \quad p[n]=q\delta[n]+p\delta[n-1]$$

No Exemplo 1.2, média e variância foram obtidas pela definição. Neste exemplo, a média e variância são determinadas pelas propriedades da transformada Z.

A transformada Z de $p[n]$ é dada por

$$G_{\mathbb{X}}(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k]z^k=(1-p)+zp=q+zp$$

O teste da soma é verificado, pois $G_{\mathbb{X}}(1)=q+p=1$. O momento de primeira ordem fornece

$$\left(\frac{zd}{dz}\right)G_{\mathbb{X}}(z)=zp \quad \Rightarrow \quad \mathscr{E}\{\mathbb{X}\}=p$$

Exemplo

Exemplo 1.6

e o momento de segunda ordem é dado por

$$\left(\frac{zd}{dz}\right)^2 G_{\mathbb{X}}(z) = zp \implies \mathscr{E}\{\mathbb{X}^2\} = p$$

A variância é

$$\sigma_{\mathbb{X}}^2 = p - p^2 = pq$$

A expansão em série de Taylor produz

$$G_{\mathbb{X}}(z) = q + zp \quad \Rightarrow \quad p_0 = q \quad , \quad p_1 = p$$

que confirma a expressão da transformada.

Exemplo

Exemplo 1.7

Considere a distribuição de probabilidade $p[n] = (1-\rho)\rho^n u[n]$, para $0 < \rho < 1$. Note que $p[n]$ é sempre maior ou igual a zero e a soma de $p[n]$ para todo n é igual a 1 (veja a Propriedade da soma geométrica). A média da variável aleatória $\mathbb{X}$ é

$$\mathscr{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} np[n] = \mathscr{Z}\{np[n]\}\Big|_{z=1}$$

Como

$$G_{\mathbb{X}}(z) = (1-\rho)\frac{1}{1-\rho z} = (1-\rho)(1-\rho z)^{-1} \quad , \quad |z| < \frac{1}{\rho}$$

e $1 \in \Omega_x$, tem-se

$$\left(\frac{zd}{dz}\right) G_{\mathbb{X}}(z) = \mathscr{Z}\{np[n]\} = (1-\rho)\rho z(1-\rho z)^{-2}$$

Em $z = 1$,

Exemplo

Exemplo 1.8

$$\mathscr{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx[n] = \frac{\rho}{1-\rho}$$

O momento de segunda ordem da variável aleatória $\mathbb{X}$ é dado por

$$\mathscr{E}\{\mathbb{X}^2\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 x[n]$$

$$\left(\frac{zd}{dz}\right)^2 G_{\mathbb{X}}(z) = \mathscr{Z}\{n^2 x[n]\} = (1-\rho)\rho\left(z(1-\rho z)^{-2} + 2\rho z^2 (1-\rho z)^{-3}\right)$$

Em $z = 1$,

$$\mathscr{E}\{\mathbb{X}^2\} = \frac{\rho+\rho^2}{(1-\rho)^2}$$

A variância de $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathscr{E}\{\mathbb{X}^2\} - \mathscr{E}\{\mathbb{X}\}^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

Somatória de Variáveis Aleatórias

Propriedade 9 (Somatória de Variáveis Aleatórias)

Se $\mathbb{X}_i$, $i = 1, \ldots, n$ *são variáveis aleatórias discretas independentes e*

$$\mathbb{W} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{X}_i$$

com a_i, $i = 1, \ldots, n$ *constantes, então*

$$G_{\mathbb{W}}(z) = \mathscr{E}\{z^{\mathbb{W}}\} = \mathscr{E}\{z^{\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{X}_i}\} = G_{\mathbb{X}_1}(z^{a_1}) G_{\mathbb{X}_2}(z^{a_2}) \cdots G_{\mathbb{X}_n}(z^{a_n})$$

pois

$$\mathscr{E}\{z^{\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{X}_i}\} = \mathscr{E}\{z^{a_1 \mathbb{X}_1}\} \cdots \mathscr{E}\{z^{a_n \mathbb{X}_n}\} = \mathscr{E}\{(z^{a_1})^{\mathbb{X}_1}\} \cdots \mathscr{E}\{(z^{a_n})^{\mathbb{X}_n}\} =$$
$$G_{\mathbb{X}_1}(z^{a_1}) \cdots G_{\mathbb{X}_n}(z^{a_n})$$

Exemplo – Soma

Exemplo 1.9 (Soma)

Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ variáveis aleatórias discretas e independentes. Então

$$G_{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}(z) = G_{\mathbb{X}}(z)G_{\mathbb{Y}}(z)$$

ou seja, a transformada Z da soma de variáveis aleatórias independentes é o produto das transformadas Z.

Exemplo 1.10 (Subtração)

Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ variáveis aleatórias discretas e independentes. Então

$$G_{2\mathbb{X}-\mathbb{Y}}(z) = G_{\mathbb{X}}(z^2)G_{\mathbb{Y}}(z^{-1})$$

A propriedade seguinte mostra que a distribuição de probabilidade associada ao produto de duas transformadas Z é a convolução das distribuições individuais.

Propriedade

Propriedade 10

Sejam

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \sum_k x[k]z^k \quad , \quad G_{\mathbb{Y}}(z) = \sum_k y[k]z^k$$

Então,

$$G_{\mathbb{X}}(z)G_{\mathbb{Y}}(z) = \sum_k p[k]z^k \quad \Rightarrow \quad p[n] = \sum_k x[k]y[n-k] = x[n] * y[n]$$

pois

$$G_{\mathbb{X}}(z)G_{\mathbb{Y}}(z) = \sum_k x[k]z^k \sum_m y[m]z^m = \sum_k \sum_m x[k]y[m]z^{k+m} = \sum_n \underbrace{\sum_k x[k]y[n-k]}_{p[n]} z^n$$

Exemplo – Variável aleatória binomial

Exemplo 1.11 (Variável aleatória binomial)

Considere $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_n$ variáveis aleatórias de Bernoulli, independentes e com a mesma distribuição de probabilidade

$$\Pr\{\mathbb{X}_i = 1\} = p > 0 \quad , \quad \Pr\{\mathbb{X}_i = 0\} = 1 - p = q > 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

Seja

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 + \cdots + \mathbb{X}_n$$

Observe que $\Pr\{\mathbb{Y} = k\} = p[k]$ é a probabilidade de ocorrerem k acertos em n testes.

Pela Propriedade 9, tem-se

$$G_{\mathbb{Y}}(z) = G_{\mathbb{X}_1}(z) \cdots G_{\mathbb{X}_n}(z) = (q + zp)^n$$

Exemplo – Variável aleatória binomial

Exemplo 1.12 (Variável aleatória binomial)

Expandindo o binômio de Newton, tem-se

$$G_{\mathbb{Y}}(z) = (q+zp)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (zp)^k q^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} z^k \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{(n-k)}}_{p[k]}$$

Observe que a fração na expressão indica o número de possibilidades de ocorrer k acertos em n testes, e o produto $p^k q^{n-k}$ indica a probabilidade de haver k acertos e $n-k$ erros. A média e a variância podem ser calculadas a partir da transformada Z

$$G_{\mathbb{Y}}(z) = (q+zp)^n \qquad\qquad G_{\mathbb{Y}}(1) = (q+p)^n = 1$$

$$\left(\frac{zd}{dz}\right) G_{\mathbb{Y}}(z) = zn(q+zp)^{(n-1)} p \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = \mathscr{E}\{\mathbb{Y}\} = np$$

Exemplo – Variável aleatória binomial

Exemplo 1.13 (Variável aleatória binomial)

$$\left(\frac{zd}{dz}\right)^2 G_{\mathbb{Y}}(z) = z\left(np\left(q+zp\right)^{(n-1)} + npz(n-1)\left(q+zp\right)^{(n-2)}p\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{E}\{\mathbb{Y}^2\} = n^2p^2 + np(1-p)$$

$$\sigma_{\mathbb{Y}}^2 = n^2p^2 + np(1-p) - n^2p^2 = npq$$

Este resultado confirma que a média da soma de variáveis aleatórias é a soma das médias e que, para variáveis aleatórias independentes, a variância da soma é a soma das variâncias.

A distribuição binomial (n,p) tende para a distribuição de Poisson quando n tende para infinito mantendo-se constante o valor médio $\rho = np$, isto é, considerando-se que $p = \rho/n$ decresça de maneira apropriada.

Poisson como limite da binomial

Propriedade 11 (Poisson como limite da binomial)

$$\lim_{n\to+\infty\;,\;p=\rho/n}(q+zp)^n = \exp\Big(\rho(z-1)\Big) \quad \textit{pois}$$

$$G_{\mathbb{Y}}(z) = \lim_{n\to+\infty\;,\;p=\rho/n}(q+zp)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\rho(z-1)}{n}\right)^n = \exp\Big(\rho(z-1)\Big)$$

pois

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \exp(a)$$

Expandindo $G_{\mathbb{Y}}(z)$ *em série de Taylor, tem-se*

$$G_{\mathbb{Y}}(z) = \exp(-\rho)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z\rho)^k}{k!} \quad \Rightarrow \quad p[k] = \Pr\{\mathbb{Y}=k\} = \frac{\rho^k}{k!}\exp(-\rho)\;,\; k\in\mathbb{N}$$

Poisson como limite da binomial

Uma demonstração alternativa pode ser feita diretamente da expressão da distribuição da binomial. Assim,

$$p[k] = \Pr\{\mathbb{Y} = k\} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\rho^k}{n^k} \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^{n-k}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\rho^k}{n^k} \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^{n-k} = \frac{\rho^k}{k!} \underbrace{\left(\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^{n-k}\right)}_{\exp(-\rho)} \underbrace{\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^k (n-k)!}\right)}_{1}$$

pois

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n} = 1$$

resultando em

$$p[k] = \Pr\{\mathbb{Y} = k\} = \frac{\rho^k}{k!} \exp(-\rho) \ , \ \ k \in \mathbb{N}$$

Exemplo

Exemplo 1.14

A média e a variância da distribuição de Poisson podem ser calculadas a partir da transformada Z.

Para uma variável aleatória de Poisson, tem-se

$$G_{\mathbb{Y}}(z) = \exp(-\rho)\exp(\rho z) \quad \Rightarrow \quad G_{\mathbb{Y}}(1) = 1$$

$$\left(\frac{zd}{dz}\right) G_{\mathbb{Y}}(z) = \exp(-\rho)\rho z \exp(\rho z) \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = \mathscr{E}\{\mathbb{Y}\} = \rho$$

$$\left(\frac{zd}{dz}\right)^2 G_{\mathbb{Y}}(z) = z\exp(-\rho)\big(\rho\exp(\rho z) + \rho^2 z\exp(\rho z)\big) \quad \Rightarrow \quad \mathscr{E}\{\mathbb{Y}^2\} = \rho + \rho^2$$

$$\sigma_{\mathbb{Y}}^2 = \rho + \rho^2 - \rho^2 = \rho$$

Note que a média de uma variável aleatória poissoniana é igual à variância.

Propriedade

Propriedade 12

A soma de variáveis aleatórias poissonianas independentes é poissoniana pois, para $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_1 + \mathbb{Y}_2$

$$G_{\mathbb{Y}}(z) = \mathscr{E}\{z^{(\mathbb{Y}_1+\mathbb{Y}_2)}\} = \mathscr{E}\{z^{\mathbb{Y}_1}\}\ \mathscr{E}\{z^{\mathbb{Y}_2}\} = G_{\mathbb{Y}_1}(z)\ G_{\mathbb{Y}_2}(z)$$

$$G_{\mathbb{Y}}(z) = \exp\big(\rho_1(z-1)\big)\exp\big(\rho_2(z-1)\big) = \exp\big((\rho_1+\rho_2)(z-1)\big)$$

que trata-se de uma distribuição poissoniana com média $\rho_1 + \rho_2$.

Exercício

A transformada Z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta é

$$\mathscr{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{2z^2 + z^3}{3(2-z)^3} \quad , \quad |z| < 2$$

Determine: a) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\}$ b) A média de $\mathbb{X}$

Solução:

$$\frac{d}{dz}X(z) = \frac{4z + 3z^2}{3(2-z)^3} + \frac{2z^2 + z^3}{(2-z)^4} \quad \Rightarrow \quad p[1] = 0 \ , \ \mathscr{E}\{\mathbb{X}\} = \frac{16}{3}$$