Livro (e-book): Linearidade em Sinais e Sistemas, Ivanil S. Bonatti, Amauri Lopes, Pedro L. D. Peres, Cristiano M. Agulhari,

Ed. Blucher, SP, 2015, 1ed., ISBN: 9788521208921.

Prof. Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Série de Fourier de Sinais Discretos

Definição 1 (Sinais Periódicos)

Um sinal $x[n]$ *é periódico se existe um inteiro positivo* N *tal que* $x[n] = x[n+N]$ *para* $\forall n \in \mathbb{Z}$. *Nesse caso,* N *é um período e, se for o menor inteiro que satisfaz a relação, é chamado de período fundamental.*

Sinais periódicos são uma classe importante de sinais de potência, que podem ser representados por séries de Fourier.

Propriedade 1

A função

$$x[n] = \exp(j\beta n) \quad , \quad \beta \in \mathbb{R} \, , \; n \in \mathbb{Z}$$

é periódica se e somente se

$$\beta = 2\pi \frac{p}{q} \quad , \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

Se $q = N$ *é o menor inteiro positivo que satisfaz a relação, então* N *é o período fundamental.*

Propriedade 1 (Prova)

Se

$$\beta = 2\pi \frac{p}{q} \quad , \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

então

$$\exp\left(j\beta(n+q)\right) = \exp(j\beta n)\exp(j\beta q) = \exp(j2\pi p)\exp(j\beta n) = \exp(j\beta n) \quad \Rightarrow \quad \textit{periódica}$$

Por outro lado, se $x[n] = \exp(j\beta n)$ *é periódica, ou seja, se*

$$x[n] = x[n+q] \quad \Rightarrow \quad \exp(j\beta n) = \exp\left(j\beta(n+q)\right)$$

então

$$\exp(j\beta n) = \exp(j\beta n)\exp(j\beta q) \quad \Rightarrow \quad \exp(j\beta q) = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta q = 2\pi p \quad , \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

Exemplo 1.1

Para que o sinal

$$x[n] = \text{sen}(an) = \frac{1}{2j}\exp(jan) - \frac{1}{2j}\exp(-jan)$$

seja periódico, é necessário que

$$a = 2\pi\frac{p}{q} \quad , \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

Propriedade 2

Se $x_1[n]$ e $x_2[n]$ são periódicos, então a soma

$$x[n] = c_1 x_1[n] + c_2 x_2[n]$$

é periódica e o período fundamental é (em geral) múltiplo dos períodos individuais.

Exemplo 1.2

O período fundamental (menor período) do sinal

$$x[n] = \exp(j3\pi n/5) - \exp(j\pi n/2) = \exp(j2\pi \frac{3}{10} n) - \exp(j2\pi \frac{1}{4} n)$$

é obtido a partir dos menores valores de m_1 e m_2 inteiros que verificam

$$N = 10m_1 = 4m_2 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 2, m_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad N = 20$$

sendo $N_1 = 10$ e $N_2 = 4$ os períodos das componentes.

Definição 2 (Produto Escalar de Sinais Periódicos)

O produto escalar dos sinais periódicos $g_k[n]$ e $g_\ell[n]$, de período N, é dado por

$$< g_k[n] g_\ell^*[n] >= \sum_{n \in \bar{N}} g_k[n] g_\ell^*[n]$$

sendo $\bar{N} = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$ ou qualquer conjunto de N inteiros consecutivos.

Definição 3 (Ortogonalidade de Sinais Periódicos)

Os sinais periódicos $g_k[n]$, de período N, são ortogonais se

$$\sum_{n\in\bar{N}} |g_k[n]|^2 > 0 \quad e \quad \sum_{n\in\bar{N}} g_k[n]g_\ell^*[n] = 0 \ , \quad k \neq \ell \ , \ k,\ell \in \mathbb{Z}$$

Exemplo 1.3

Considere os sinais

$$p[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1] \quad , \quad q[n] = \delta[n-1] - \delta[n+1]$$

e os sinais periódicos, de periodo $N > 2$, $N \in \mathbb{Z}_+$, dados por

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[n-kN] \quad , \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q[n-kN]$$

O produto escalar é dado por

$$< x[n]y^*[n] >=< p[n]q^*[n] >= \sum_{k \in \bar{N}} p[k]q[k] = 1 + 0 - 1 = 0$$

implicando que os sinais x e y são ortogonais.

As normas de $x[n]$ e $y[n]$ são dadas por

$$\|x[n]\| = \sqrt{< x[n]x^*[n] >} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad , \quad \|y[n]\| = \sqrt{< y[n]y^*[n] >} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Exemplo 1.4

Considere o sinal

$$p[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1]$$

e os sinais periódicos

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[n-k6] \quad , \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[n-3-k6]$$

Os sinais $x[n]$ e $y[n]$ são ortogonais. Note que, embora os períodos de $x[n]$ e $y[n]$ sejam ambos iguais a 6, a soma $x[n]+y[n]$ possui período fundamental igual a 3.

Exemplo 1.5

Considere os N sinais periódicos

$$g_k[n] = \exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right) \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \ , \ N \in \mathbb{Z}_+ \ , \ k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$$

O produto escalar $\alpha_{k\ell}$ é dado por

$$\alpha_{k\ell} = \sum_{n \in \bar{N}} g_k[n] g_\ell^*[n] = \sum_{n \in \bar{N}} \exp\left(j(k-\ell)\frac{2\pi}{N}n\right) = \sum_{n \in \bar{N}} z^n = z^{n_1} \sum_{n=0}^{N-1} z^n$$

com $z = \exp\left(j(k-\ell)\dfrac{2\pi}{N}\right)$ e n_1 o menor inteiro pertencente ao conjunto $\bar{N}$. Portanto,

$$\alpha_{k\ell} = \begin{cases} N, & \text{para} \quad k = \ell \\ (z^{n_1})\dfrac{1-z^N}{1-z} = 0, & \text{para} \quad k \neq \ell \end{cases}$$

implicando que os sinais $g_k[n]$ são ortogonais e têm norma $\sqrt{N}$, ou seja,

$$\|g_k[n]\|^2 = \|\exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right)\|^2 = N \quad , \quad \forall k \in \bar{N}$$

Sinais Linearmente Independentes

Definição 4 (Sinais Linearmente Independentes)

Um conjunto de sinais $\{g_k[n], k = 1, \ldots, m\}$ *é linearmente independente se e somente se*

$$\sum_{k=1}^{m} c_k g_k[n] = 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad c_k = 0 \ , \ k = 1, \ldots, m$$

Definição 5 (Espaço Linear)

A combinação linear de um conjunto de m sinais $g_k[n]$*, isto é,*

$$g[n] = \sum_{k=1}^{m} c_k g_k[n]$$

com escalares $c_k \in \mathbb{C}$ *gera um espaço linear, cuja dimensão é dada pelo número* r *de sinais linearmente independentes do conjunto* ($r \leq m$)*. Qualquer conjunto de* r *sinais que gere o mesmo espaço é uma base para esse espaço.*

Exemplo

Exemplo 1.6

Os sinais

$$x_1[n] = 1 \quad , \quad x_2[n] = n \quad , \quad x_3[n] = n^2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

são linearmente independentes, pois

$$c_1 x_1[n] + c_2 x_2[n] + c_3 x_3[n] = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0, \quad \text{pois} \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$$

Exemplo

Exemplo 1.7

Os sinais

$$y_1[n] = \lambda_1^n \;\text{ e }\; y_2[n] = \lambda_2^n \quad , \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

são linearmente independentes se e somente se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pois $a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n = 0$ implica

$$\left.\begin{array}{r} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = 0$$

Propriedade

Propriedade 3

Sinais ortogonais são linearmente independentes.

Prova:

$$\sum_k c_k g_k[n] = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \sum_k c_k g_k[n] g_\ell^*[n] = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_n \sum_k c_k g_k[n] g_\ell^*[n] = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_k c_k \sum_n g_k[n] g_\ell^*[n] = 0$$

$$\sum_{k \neq \ell} c_k \underbrace{\sum_n g_k[n] g_\ell^*[n]}_{=0} + c_\ell \underbrace{\sum_n g_\ell[n] g_\ell^*[n]}_{>0} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_\ell = 0 \ \forall \ell$$

Representação em uma Base

Propriedade 4 (Representação em uma Base)

Considere o sinal periódico $x[n]$, de período N, e uma base de dimensão N de sinais periódicos $g_k[n]$ ortogonais com período N.

A representação do sinal $x[n]$ na base $g_k[n]$ é dada por

$$x[n] = \sum_k c_k g_k[n] \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

sendo

$$c_k = \frac{< x[n] g_k^*[n] >}{< g_k[n] g_k^*[n] >}$$

pois

$$\sum_{n \in \bar{N}} x[n] g_k^*[n] = \sum_\ell c_\ell \sum_{n \in \bar{N}} g_\ell[n] g_k^*[n] = c_k \sum_{n \in \bar{N}} |g_k[n]|^2 \quad \Rightarrow c_k = \frac{\displaystyle\sum_{n \in \bar{N}} x[n] g_k^*[n]}{\displaystyle\sum_{n \in \bar{N}} |g_k[n]|^2}$$

Propriedade

Propriedade 5

Considere o sinal periódico $x[n]$, de período N, e uma base de dimensão N de sinais periódicos $g_k[n]$ ortogonais com período N, tais que

$$x[n] = \sum_k c_k g_k[n]$$

Então,

$$\sum_{n \in \bar{N}} |x[n]|^2 = \sum_k |c_k|^2 \sum_{n \in \bar{N}} |g_k[n]|^2$$

Prova:

$$\sum_{n \in \bar{N}} |x[n]|^2 = \sum_{n \in \bar{N}} x[n] \sum_k c_k^* g_k^*[n] = \sum_k c_k^* \sum_{n \in \bar{N}} x[n] g_k^*[n] = \sum_k c_k^* c_k \sum_{n \in \bar{N}} |g_k[n]|^2$$

Série Exponencial de Fourier para sinais discretos periódicos

Propriedade 6 (Série Exponencial)

$$x[n] = \sum_{k\in\bar{N}} c_k \exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right)$$

com

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} x[n]\exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right)$$

pois, como calculado no Exemplo 1.5,

$$\|\exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right)\|^2 = N \quad , \quad \forall k\in\bar{N} \quad e \quad \exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right)^* = \exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right)$$

com coeficientes periódicos, de período (no máximo) igual a N

$$c_{k+N} = c_k = c[k]$$

Notação:

$$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N \quad \Leftrightarrow \quad x[n] = \sum_{k\in\bar{N}} c_k \exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right) \, , \; c_k = \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} x[n]\exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right)$$

Propriedade 7 (Linearidade)

$$\mathscr{F}_S\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\}_N = \alpha_1 \mathscr{F}_S\{x_1[n]\}_N + \alpha_2 \mathscr{F}_S\{x_2[n]\}_N$$

Propriedade 8 (Soma)

$$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N \quad \Rightarrow \quad c_0 = \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} x[n] \ \ , \ \ x[0] = \sum_{k\in\bar{N}} c_k$$

Propriedade 9 (Teorema de Parseval para Série Exponencial de Fourier)

$$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} |x[n]|^2 = \sum_{k\in\bar{N}} |c_k|^2 \qquad \textit{(potência média)}$$

Exemplo 1.8

A série exponencial de Fourier de $x[n]$ dado por

$$x[n] = \text{sen}(\frac{2\pi}{5}n)$$

pode ser obtida a partir do Teorema de Euler

$$x[n] = \text{sen}(\frac{2\pi}{5}n) = -\frac{1}{2j}\exp(-j\frac{2\pi}{5}n) + \frac{1}{2j}\exp(j\frac{2\pi}{5}n)$$

$$N = 5 \quad , \quad c_{-1} = -\frac{1}{2j} \quad , \quad c_1 = \frac{1}{2j} \quad , \quad c_0 = c_2 = c_3 = 0$$

$$c_4 = c_{-1} = -\frac{1}{2j} \quad \Rightarrow \quad x[n] = \frac{1}{2j}\exp(j\frac{2\pi}{5}n) - \frac{1}{2j}\exp(j4\frac{2\pi}{5}n)$$

A potência média é $1/4 + 1/4 = 1/2$.

Exemplo 1.9

A série exponencial de Fourier de $x[n]$ dado por

$$x[n] = \text{sen}(\frac{2\pi}{5}n) + \cos(\frac{\pi}{5}n)$$

pode ser obtida a partir do Teorema de Euler

$$x[n] = -\frac{1}{2j}\exp(-j\frac{2\pi}{5}n) + \frac{1}{2j}\exp(j\frac{2\pi}{5}n) + \frac{1}{2}\exp(j\frac{2\pi}{10}n) + \frac{1}{2}\exp(-j\frac{2\pi}{10}n)$$

$$= -\frac{1}{2j}\exp(-j2\frac{2\pi}{10}n) + \frac{1}{2j}\exp(j2\frac{2\pi}{10}n) + \frac{1}{2}\exp(j\frac{2\pi}{10}n) + \frac{1}{2}\exp(-j\frac{2\pi}{10}n)$$

$$N = 10 \ , \ c_{-2} = -\frac{1}{2j} \ , \ c_{-1} = \frac{1}{2} \ , \ c_1 = \frac{1}{2} \ , \ c_2 = \frac{1}{2j}$$

$$c_8 = c_{-2} = -\frac{1}{2j} \ , \ c_9 = c_{-1} = \frac{1}{2} \ , \ c_i = 0 \ , \ i \in \{0,3,4,5,6,7\}$$

$$x[n] = -\frac{1}{2j}\exp(j8\frac{2\pi}{10}n) + \frac{1}{2j}\exp(j2\frac{2\pi}{10}n) + \frac{1}{2}\exp(j\frac{2\pi}{10}n) + \frac{1}{2}\exp(j9\frac{2\pi}{10}n)$$

A potência média é 1.

Exemplo 1.10

A série exponencial de Fourier de $x[n]$ dado por

$$x[n] = 2\cos(\frac{2\pi}{5}n + \frac{\pi}{4})$$

pode ser obtida a partir do Teorema de Euler. Note que o período é $N = 5$ e os coeficientes da série são

$$c_1 = \exp(j\pi/4) \quad , \quad c_{-1} = c_4 = \exp(-j\pi/4) \quad , \quad c_0 = c_2 = c_3 = 0$$

A potência média de $x[n]$ é dada por

$$|c_1|^2 + |c_4|^2 = 2$$

Exemplo 1.11

Considere um sinal discreto $x[n]$ periódico, de período $N = 5$, cujos coeficientes da primeira e terceira harmônicas da série exponencial de Fourier do sinal são, respectivamente, 1 e 4. Os demais coeficientes são nulos.

Portanto,

$$x[n] = c_1 \exp(j\frac{2\pi}{5}n) + c_3 \exp(j3\frac{2\pi}{5}n) \quad , \quad c_1 = 1 \ , \ c_3 = 4$$

$$x[0] = x[5] = 5 \qquad \text{periódico, de período } N = 5$$

$$x[1] \approx -2.93 - j1.40 \ , \quad x[2] \approx 0.43 + j4.39 \ , \quad x[3] \approx 0.43 - j4.39 \ , \quad x[4] \approx -2.93 + j1.40$$

O Teorema de Parseval pode ser verificado numericamente, pois

$$1^2 + 4^2 = 17 = \frac{1}{5}\Big(\sum_{n=0}^{4} |x[n]|^2\Big)$$

Exemplo 1.12 (Trem de impulsos)

A série de Fourier do trem periódico de impulsos

$$\delta_N[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \delta[n - \ell N]$$

é dada por

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \bar{N}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \delta[n - \ell N] \exp(-jk\frac{2\pi}{N}n) = \frac{1}{N} \sum_{n \in \bar{N}} \delta[n] \exp(-jk\frac{2\pi}{N}n) = \frac{1}{N} \quad , \quad k \in \bar{N}$$

Portanto,

$$\mathscr{F}_S\{\delta_N[n]\}_N = \left\{\frac{1}{N}\right\}_N \quad , \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] = \frac{1}{N} \sum_{k \in \bar{N}} \exp(jk\frac{2\pi}{N}n)$$

Observe que os coeficientes da série são constantes (isto é, o período é 1 qualquer que seja N).

Exemplo 1.13 (Pulso ímpar)

Considere o sinal periódico, de período $N = 4$, dado por

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[n-kN] \quad , \quad p[n] = -\delta[n+1] + \delta[n-1]$$

Os coeficientes da série de Fourier são dados por

$$c_k = \frac{1}{4} \sum_{n=-1}^{2} \Big(-\delta[n+1] + \delta[n-1] \Big) \exp(-jk\frac{2\pi}{4}n)$$

$$= \frac{1}{4}\Big(-\exp(jk\frac{\pi}{2}) + \exp(-jk\frac{\pi}{2}) \Big) = -\frac{j}{2}\text{sen}(k\frac{\pi}{2})$$

Exemplo 1.13 (Pulso ímpar (cont.))

$$c_0 = 0 \text{ (valor médio)} \quad , \quad c_1 = -j/2 \quad , \quad c_2 = 0 \quad , \quad c_3 = +j/2 = c_{-1}$$

Note que

$$\sum_{k=0}^{3} c_k = x[0] = 0 \quad , \quad \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{3} |c_k|^2 = 0.5$$

$$x[n] = c_1 \exp\big(j\frac{2\pi}{4}n\big) + c_{-1}\exp\big(-j\frac{2\pi}{4}n\big) = \text{sen}\big(\frac{\pi}{2}n\big)$$

Exemplo 1.14 (Pulso par)

Considere o sinal periódico, de período $N = 10$, dado por

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[n-kN] \quad , \quad p[n] = \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]$$

Os coeficientes da série de Fourier são dados por

$$c_k = \frac{1}{10} \sum_{n=-4}^{5} \Big(\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]\Big) \exp(-jk\frac{2\pi}{10}n)$$

$$= \frac{1}{10}\Big(1 + \exp(-jk\frac{2\pi}{10}) + \exp(jk\frac{2\pi}{10})\Big) = \frac{1}{10}\Big(1 + 2\cos(k\frac{\pi}{5})\Big)$$

$$c_0 = \frac{3}{10} \text{ (valor médio) } = \frac{1}{10}\sum_{n=-4}^{5} p[n]$$

$$c_{k,k=0,\dots,9} \approx \begin{bmatrix} 0.30 & 0.26 & 0.16 & 0.04 & -0.06 & -0.10 & -0.06 & 0.04 & 0.16 & 0.26 \end{bmatrix}$$

Note que

$$\sum_{k=0}^{9} c_k = x[0] = 1 \quad , \quad \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{9} |c_k|^2 = 0.3$$

Complexo Conjugado

Propriedade 10 (Complexo Conjugado)

$$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N \ \text{ e } y[n] = x^*[n] \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}_S\{y[n]\}_N = \{c^*_{-k}\}_N$$

pois

$$y[n] = x^*[n] = \sum_{k\in\bar{N}} c_k^* \exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right) = \sum_{k\in\bar{N}} c^*_{-k} \exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right)$$

Propriedade 11

$$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N \text{ e } x[n] \text{ é real} \quad \Leftrightarrow \quad c_k^* = c_{-k}$$

Prova:
Se $x[n]$ é real, então

$$c_k^* = \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} x[n]\exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right) = c_{-k}$$

Se $c_k^* = c_{-k}$, então

$$x^*[n] = \sum_{k\in\bar{N}} c_{-k}\exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right) = \sum_{k\in\bar{N}} c_k\exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right) = x[n] \quad \Rightarrow \quad x[n] \text{ é real}$$

$$c_k^* = c_{-k} \quad \Rightarrow \quad |c_k| = |c_{-k}| \ \ \text{(par)} \quad , \quad \angle c_k^* = -\angle c_{-k} \ \ \text{(ímpar)}$$

Série Trigonométrica de Fourier para Sinais Discretos Periódicos

Propriedade 12 (Série Trigonométrica)

Considere $\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N$, $x[n]$ *real. Então, para* N *ímpar,* $N > 1$, *tem-se*

$$x[n] = a_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} b_k \,\mathrm{sen}\left(k\frac{2\pi}{N}n\right)$$

com

$$a_0 = c_0 \quad , \quad a_k = c_k + c_{-k} \quad , \quad b_k = j(c_k - c_{-k})$$

pois, pela Propriedade 11, $c_k^* = c_{-k}$ *e*

$$c_k \exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right) + c_{-k}\exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right) = \underbrace{(c_k + c_{-k})}_{a_k}\cos\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) + \underbrace{j(c_k - c_{-k})}_{b_k}\mathrm{sen}\left(k\frac{2\pi}{N}n\right)$$

Propriedade 12 (Série Trigonométrica (cont.))

Para N par, $N > 1$,

$$x[n] = a_0 + a_{N/2}(-1)^n + \sum_{k=1}^{N/2-1} a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) + \sum_{k=1}^{N/2-1} b_k \mathrm{sen}\left(k\frac{2\pi}{N}n\right)$$

com

$$a_0 = c_0 \quad , \quad a_{N/2} = c_{N/2} \quad , \quad a_k = c_k + c_{-k} \quad , \quad b_k = j(c_k - c_{-k})$$

pois, para $k = 0, 1, \ldots, N/2-1$, vale o argumento do caso N ímpar. O coeficiente $c_{N/2}$ é real, pois o termo

$$c_{N/2} \underbrace{\exp\left(j\frac{N}{2}\frac{2\pi}{N}n\right)}_{(-1)^n}$$

somado aos demais termos tem que reproduzir $x[n]$ real.

Propriedade

Propriedade 13

$$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N \text{ e } x[n] \text{ é real e par} \quad \Rightarrow \quad c_k = c_k^* = c_{-k} \text{ (real e par)}$$

Prova:
Se $x[n]$ é real e par, então

$$c_k^* = \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} x[n]\exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right) = \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} x[-n]\exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} x[n]\exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right) = c_k$$

Pela Propriedade 11,

$$c_k^* = c_{-k} = c_k$$

Note que, neste caso, a série trigonométrica não possui termos em seno ($b_k = 0$).

Exemplo

Exemplo 1.15

A série exponencial de Fourier do sinal $x[n]$, real e par, dado por

$$x[n] = 2\cos(\frac{\pi}{2}n) \quad , \quad N = 4$$

é dada por

$$c_1 = 1 \ , \ c_{-1} = c_3 = 1 \quad , \quad c_0 = c_2 = 0 \ \text{ coeficientes reais}$$

Outro sinal real e par é o do Exemplo 1.14.

Propriedade

Propriedade 14

$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N$ *e* $x[n]$ *é real e ímpar* $\Rightarrow$ $c_k^* = -c_k = c_{-k}$ *(imaginário puro e ímpar)*

Prova:
Se $x[n]$ *é real e ímpar, então*

$$c_k^* = \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} x[n]\exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right) = \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} -x[-n]\exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right) =$$

$$= -\frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} x[n]\exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right) = -c_k$$

Pela Propriedade 11, $c_k^* = c_{-k} = -c_k$. *Note que, neste caso, a série trigonométrica não possui termos em cosseno* $(a_k = 0)$ *e* $a_0 = 0$.

Exemplo 1.16

Considere o sinal periódico e ímpar, de período $N = 5$, dado por

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[n-kN] \quad , \quad p[n] = -\delta[n+1] + \delta[n-1]$$

Os coeficientes da série de Fourier são dados por

$$c_k = \frac{1}{5}\sum_{n=-2}^{2}\Big(-\delta[n+1]+\delta[n-1]\Big)\exp(-jk\frac{2\pi}{5}n)$$

$$= \frac{1}{5}\Big(-\exp(jk\frac{2\pi}{5}) + \exp(-jk\frac{2\pi}{5})\Big) = \frac{-2j}{5}\Big(\text{sen}(k\frac{2\pi}{5})\Big)$$

$$c_0 = 0(\text{valor médio}) = \frac{1}{5}\sum_{n=-2}^{2} p[n] \; , c_{k,k=0,\dots,4} \approx \begin{bmatrix} 0 & -0.38j & -0.24j & 0.24j & 0.38j \end{bmatrix}$$

Note que os coeficientes são imaginários puros (pois o sinal é real e ímpar), como no caso do Exemplo 1.8, e também que

$$\sum_{k=0}^{4} c_k = x[0] = 0 \quad , \quad \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4}|x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{4}|c_k|^2 = 0.4$$

Deslocamento no Tempo

Propriedade 15 (Deslocamento no Tempo)

$$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N \; , \; m \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}_S\{x[n-m]\} = \{c_k \exp(-jk\frac{2\pi}{N}m)\}_N$$

pois

$$x[n-m] = \sum_{k \in \bar{N}} c_k \exp(-jk\frac{2\pi}{N}m)\exp(jk\frac{2\pi}{N}n)$$

O deslocamento no tempo altera a fase (e não o módulo) dos coeficientes da série de Fourier. Como consequência, não altera a potência média do sinal.

Diferença de Primeira Ordem

Propriedade 16 (Diferença de Primeira Ordem)

$$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N \quad e \ y[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{F}_S\{x[n] - x[n-1]\} = \left\{ \left(1 - \exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}\right)\right) c_k \right\}_N$$

Propriedade 17 (Soma)

$$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N \quad e \quad c_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}_S\{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\} = \Big\{\frac{c_k}{1-\exp(-jk\frac{2\pi}{N})}\ , k \neq 0\Big\}_N$$

Prova: O sinal $y[n]$ *é periódico, com período* N*, pois*

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \quad \Rightarrow \quad y[n+N] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] + \sum_{k\in\bar{N}} x[k] = y[n]$$

Para $k \neq 0$*, tem-se*

$$\mathscr{F}_S\{y[n]\}_N = \{d_k\}_N \ , \ x[n] = y[n] - y[n-1] \quad \Rightarrow \quad c_k = d_k\Big(1 - \exp\big(-jk\frac{2\pi}{N}\big)\Big)$$

$$\Rightarrow \quad d_k = \frac{c_k}{1-\exp(-jk\frac{2\pi}{N})}$$

Para $k = 0$,

$$d_0 = \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} y[n]$$

Exemplo 1.17

A série de Fourier dos sinais periódicos, de período $N = 10$,

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[n-kN] \quad , \quad p[n] = -\delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n-1] - \delta[n-2]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q[n-kN] \quad , \quad q[n] = -\delta[n+2] + \delta[n-1]$$

$$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N, c_k = \frac{1}{10}\big(-\exp(jk2\pi/5) - \exp(-jk2\pi/5) + \exp(jk\pi/5) + \exp(-jk\pi/5)\big)$$

$$\Rightarrow \quad c_k = \frac{1}{5}\Big(\cos(k\pi/5) - \cos(k2\pi/5)\Big) \qquad x[n] \text{ real e par, } c_k \text{ real e par}$$

$$c_{k,k=0,\ldots,9} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0.10 & 0.22 & 0.10 & -0.22 & -0.40 & -0.22 & 0.10 & 0.22 & 0.10 \end{bmatrix}$$

$$c_0 = 0 \quad , \quad \sum_{k=0}^{9} c_k = x[0] = 0 \quad , \quad \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{9} |c_k|^2 = 0.4$$

Exemplo 1.18 (cont.)

$$\mathscr{F}_S\{y[n]\}_N = \{d_k\}_N \quad , \quad d_k = \frac{1}{10}\Big(-\exp(jk2\pi/5) + \exp(-jk\pi/5)\Big)$$

$$d_{k,k=0,\ldots,9} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0.05-0.15j & 0.11-0.15j & 0.05-0.04j & -0.11+0.04j \\ -0.20 & -0.11-0.04j & 0.05+0.04j & 0.11+0.15j & 0.05+0.15j \end{bmatrix}$$

$$d_0 = 0 \quad , \quad \sum_{k=0}^{9} d_k = y[0] = 0 \quad , \quad \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9} |y[n]|^2 = \sum_{k=0}^{9} |d_k|^2 = 0.2$$

Observe que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \quad , \quad q[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} p[k]$$

e, pela Propriedade 17,

$$c_k = d_k\Big(1 - \exp(-jk\frac{2\pi}{N})\Big)$$

Inversão no Tempo

Propriedade 18 (Inversão no Tempo)

$$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N \text{ e } y[n] = x[-n] \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}_S\{y[n]\}_N = \{d_k\}_N = \{c_{-k}\}_N$$

pois

$$d_k = \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} y[n]\exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right) = \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} x[-n]\exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} x[n]\exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right) = \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} x[n]\exp\left(-j(-k)\frac{2\pi}{N}n\right) = c_{-k}$$

Propriedade 19 (Expansão no Tempo)

$$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+ \ e \ \ y[n] = \begin{cases} x[n/m] & , \quad n/m \in \mathbb{Z} \\ 0 & , \quad n/m \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Então,

$$\mathscr{F}_S\{y[n]\}_N = \{\frac{1}{m}c_k\}_{mN}$$

Prova: O período de $y[n]$ é mN, pois, para $n/m \in \mathbb{Z}$ tem-se

$$y[n+mN] = x[(n+mN)/m] = x[n/m+N] = x[n/m] = y[n]$$

e, para n/m não inteiro, $y[n+mN] = y[n] = 0$. Os coeficientes d_k, para $k \in \overline{mN}$ da série de Fourier de $y[n]$ são

$$d_k = \frac{1}{mN}\sum_{\ell \in \overline{mN}} y[\ell]\exp\left(-jk\frac{2\pi}{mN}\ell\right) = \frac{1}{mN}\sum_{n \in \bar{N}} x[n]\exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right) = \frac{1}{m}c_k$$

pois $y[\ell] = 0$ para $\left(\dfrac{\ell}{m}\right) \notin \mathbb{Z}$ e $y[\ell = nm] = x[n]$. Observe que o período dos mN coeficientes d_k é N (igual ao período do sinal $x[n]$), ou seja, os coeficientes d_k são obtidos por m repetições dos N coeficientes c_k.

Exemplo 1.19

Considere o sinal periódico de período $N = 6$, dado por

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[n-kN] \quad , \quad p[n] = 6\delta[n] + 6\delta[n-2]$$

Os coeficientes da série de Fourier são dados por

$$d_k = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}\Big(6\delta[n] + 6\delta[n-2]\Big)\exp(-jk\frac{2\pi}{6}n) = 1 + \exp(-jk\frac{2\pi}{3})$$

$$d_0 = 2 \text{ (valor médio) } = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} p[n]$$

$$d_{k,k=0,\ldots,5} \approx \begin{bmatrix} 2 & 0.50 - j0.87 & 0.50 + j0.87 & 2 & 0.50 - j0.87 & 0.50 + j0.87 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{5} d_k = y[0] = 6 \quad , \quad \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} |y[n]|^2 = \sum_{k=0}^{5} |d_k|^2 = 12$$

Exemplo 1.20

Considere o sinal periódico de período $N = 3$, dado por

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[n-kN] \quad , \quad p[n] = 6\delta[n] + 6\delta[n-1]$$

Os coeficientes da série de Fourier são dados por

$$c_k = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2}\Big(6\delta[n]+6\delta[n-1]\Big)\exp(-jk\frac{2\pi}{3}n) = 2+2\exp(-jk\frac{2\pi}{3})$$

$$c_0 = 4 \text{ (valor médio) } = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} p[n]$$

$$c_{k,k=0,\ldots,2} \approx \begin{bmatrix} 4 & 1.00-j1.73 & 1.00+j1.73 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{2} c_k = x[0] = 6 \quad , \quad \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2}|x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{2}|c_k|^2 = 24$$

Note que $y[n]$ é a expansão do sinal $x[n]$ para $m = 2$, sendo portanto o período de $y[n]$ o dobro do período de $x[n]$. Pela Propriedade 19, os coeficientes da série de $y[n]$ são obtidos da repetição (duas vezes) dos coeficientes da série de $x[n]$ divididos por 2.

Definição 6 (Convolução Periódica)

A convolução periódica de $x[n]$ e $y[n]$ (sinais periódicos de período N) é dada por

$$x[n] \circledast y[n] = \sum_{k \in \bar{N}} x[k] y[n-k]$$

Exemplo 1.21

Considere os sinais periódicos, com período $N = 3$, $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[n-kN]$, $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q[n-kN]$

$$p[n] = \delta[n+1] + \delta[n-1] \quad , \quad q[n] = -\delta[n+1] + \delta[n-1]$$

$$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N \quad , \quad c_k = \frac{1}{3}\Big(\exp(jk2\pi/3) + \exp(-jk2\pi/3)\Big) = \frac{2}{3}\cos(k2\pi/3)$$

$$c_{k,k=0,1,2} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{bmatrix} , \sum_{k=0}^{2} c_k = x[0] = 0 , \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{2} |c_k|^2 = 2/3$$

Exemplo 1.22 (cont.)

$$\mathscr{F}_S\{y[n]\}_N = \{d_k\}_N \quad , \quad d_k = \frac{1}{3}\Big(-\exp(jk2\pi/3)+\exp(-jk2\pi/3)\Big) = \frac{2}{3j}\text{sen}(k2\pi/3)$$

$$d_{k,k=0,1,2} = \begin{bmatrix} 0 & -j/\sqrt{3} & j/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$d_0 = 0 \quad , \quad \sum_{k=0}^{2} d_k = y[0] = 0 \quad , \quad \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} |y[n]|^2 = \sum_{k=0}^{2} |d_k|^2 = 2/3$$

A convolução periódica $v[n] = x[n] \circledast y[n]$ produz

$$v[n] = x[n] \circledast y[n] = \sum_{k=0}^{2} x[k]y[n-k] = x[0]y[n] + x[1]y[n-1] + x[2]y[n-2]$$

$$= \delta_3[n+1] - \delta_3[n-1]$$

cujos coeficientes são dados por $e_k = -d_k$, pois $v[n] = -y[n]$.

Propriedade 20 (Convolução Periódica)

- *A convolução periódica produz funções periódicas, pois para*

$$f[n] = x[n] \circledast y[n] \quad \Rightarrow \quad f[n+N] = \sum_{k\in\bar{N}} x[k]y[n+N-k] = \sum_{k\in\bar{N}} x[k]y[n-k] = f[n]$$

- *A convolução periódica é comutativa, associativa e distributiva em relação à soma;*
- *O elemento neutro da convolução periódica de período N é o trem periódico de impulsos, dado por*

$$\delta_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-kN]$$

Prova:

$$x[n] \circledast \delta_N[n] = \sum_{k\in\bar{N}} x[k]\delta_N[n-k] \quad , \quad \delta_N[n-k] = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \delta[n-k-\ell N]$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k\in\bar{N}} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k-\ell N] = x[n]$$

pois

$$\delta[n-k-\ell N] = 1 \quad \text{com} \quad n,k \in \{0,\dots,N-1\} \quad \Rightarrow \quad n=k \ , \ \ell = 0$$

Convolução Periódica

Propriedade 21 (Convolução Periódica)

$$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N \quad , \quad \mathscr{F}_S\{y[n]\}_N = \{d_k\}_N$$

Então,

$$\mathscr{F}_S\{x[n] \circledast y[n]\}_N = \{N c_k d_k\}_N$$

pois

$$\frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}}(x[n]\circledast y[n])\exp(-jk\frac{2\pi}{N}n) = \sum_{\ell\in\bar{N}} x[\ell]\frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} y[n-\ell]\exp(-jk\frac{2\pi}{N}n) =$$

$$= \sum_{\ell\in\bar{N}} x[\ell]\exp(-jk\frac{2\pi}{N}\ell)\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{m\in\bar{N}} y[m]\exp(-jk\frac{2\pi}{N}m)}_{d_k} = N c_k d_k$$

Exemplo

Exemplo 1.23

Retomando o Exemplo 1.21, com os coeficientes

$$c_{k,k=0,1,2} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \quad , \quad d_{k,k=0,1,2} = \begin{bmatrix} 0 & -j/\sqrt{3} & j/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

tem-se

$$e_k = N c_k d_k = -d_k = \begin{bmatrix} 0 & j/\sqrt{3} & -j/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad v[n] = \frac{-2}{\sqrt{3}} \mathrm{sen}(2\pi n/3) = \delta_3[n+1] - \delta_3[n-1]$$

Observe que

$$p[n] * q[n] = -\delta[n+2] + \delta[n-2] \neq x[n] \circledast y[n]$$

Multiplicação no Tempo

Propriedade 22 (Multiplicação no Tempo)

$$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N \quad , \quad \mathscr{F}_S\{y[n]\}_N = \{d_k\}_N$$

Então,

$$\mathscr{F}_S\{x[n]y[n]\}_N = \{c_k \circledast d_k\}_N$$

Prova:

Denominando e_k os coeficientes da série associada ao produto, tem-se

$$e_k = \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} x[n]y[n]\exp(-jk\frac{2\pi}{N}n) = \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} x[n]\sum_{\ell\in\bar{N}} d_\ell \exp(jn\frac{2\pi}{N}\ell)\exp(-jk\frac{2\pi}{N}n)$$

$$= \sum_{\ell\in\bar{N}} d_\ell \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} x[n]\exp(-j(k-\ell)\frac{2\pi}{N}n)}_{c_{k-\ell}} = \sum_{\ell\in\bar{N}} d_\ell c_{k-\ell} = c_k \circledast d_k$$

Exemplo 1.24

Considere os sinais periódicos do Exemplo 1.21, com período $N = 3$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[n-kN] \quad , \quad p[n] = \delta[n+1] + \delta[n-1]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q[n-kN] \quad , \quad q[n] = -\delta[n+1] + \delta[n-1]$$

$$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N \quad , \quad c_k = \frac{2}{3}\cos(k2\pi/3) \quad , \quad c_{k,k=0,1,2} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{F}_S\{y[n]\}_N = \{d_k\}_N \quad , \quad d_k = \frac{2}{3j}\mathrm{sen}(k2\pi/3) \quad , \quad d_{k,k=0,1,2} = \begin{bmatrix} 0 & -j/\sqrt{3} & j/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Seja

$$v[n] = x[n]y[n] = y[n] \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}_S\{v[n]\}_N = \{e_k\}_N \quad , \quad e_k = \frac{2}{3j}\mathrm{sen}(k2\pi/3)$$

que é a convolução periódica de $c[k] \circledast d[k]$.

Deslocamento na Frequência

Propriedade 23 (Deslocamento na Frequência)

$$\mathscr{F}_S\{x[n]\}_N = \{c_k\}_N \ , \ m \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}_S\{y[n] = x[n]\exp(jm\frac{2\pi}{N}n)\} = \{c_{k-m}\}_N$$

pois

$$d_k = \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} y[n]\exp(-jk\frac{2\pi}{N}n) = \frac{1}{N}\sum_{n\in\bar{N}} x[n]\exp(jm\frac{2\pi}{N}n)\exp(-jk\frac{2\pi}{N}n) = c_{k-m}$$

O deslocamento na frequência provoca um deslocamento cíclico nos coeficientes da série, e portanto não altera a potência média do sinal.