Livro (e-book): Linearidade em Sinais e Sistemas, Ivanil S. Bonatti, Amauri Lopes, Pedro L. D. Peres, Cristiano M. Agulhari,

Ed. Blucher, SP, 2015, 1ed., ISBN: 9788521208921.

Prof. Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Equações a Diferenças

Definição 1 (Equações a Diferenças)

Equações envolvendo sequências enumeráveis e seus deslocamentos são denominadas equações a diferenças.

Exemplo 1.1 (Filtro passa-alta)

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{2} \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

Para a entrada $x[n] = (-1)^n$, a saída é $y[n] = (-1)^n$. Para $x[n] = 1^n$, tem-se $y[n] = 0$.

Exemplo 1.2 (Filtro passa-baixa)

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2} \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

Para $x[n] = (-1)^n$, a saída é $y[n] = 0$. Para $x[n] = 1^n$, tem-se $y[n] = 1^n$.

Exemplo

Exemplo 1.3

População anual de peixes em um lago (em termos percentuais)

$$y[n+1] - ay[n](1-y[n]) = x[n] \ , \quad 0 \leq y[0] \leq 1$$

sendo a um parâmetro real que representa as condições ambientais do lago.

Equações a diferenças lineares descrevem sistemas lineares, isto é, sistemas para os quais vale o princípio da superposição. Os sistemas descritos nos exemplos 1.1 e 1.2 são lineares, enquanto que o Exemplo 1.3 descreve um sistema não-linear.

Equações a diferenças lineares com coeficientes constantes e condições iniciais nulas descrevem sistemas lineares invariantes no tempo.

Exemplo – Somador

Exemplo 1.4 (Somador)

Para $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$, a resposta ao impulso é

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n] = \begin{cases} 1 \ , & n \geq 0 \\ 0 \ , & n < 0 \end{cases}$$

sendo $u[n]$ a função degrau. Note que o somador pode ser descrito pela equação a diferenças de primeira ordem

$$y[n+1] = y[n] + x[n+1] \ , \ y[0] = y_0 \text{ condição inicial}$$

Utilizando o operador de deslocamento p, tem-se $(p-1)y[n] = px[n]$.

Equações a diferenças lineares a coeficientes constantes podem ser resolvidas por substituição sistemática, por meio da transformada Z ou pelo método dos coeficientes a determinar.

Exemplo 1.5

A equação homogênea a diferenças de primeira ordem

$$y[n+1] = \rho y[n] \quad , \quad y[0] = 1, \ \rho \in \mathbb{R}$$

pode ser resolvida por substituição sistemática, resultando em $y[n] = \rho^n$

e vale para todo n, de $-\infty$ a $+\infty$. Observe que a sequência $y[n]$ não possui transformada Z, pois

$$\mathscr{Z}\{y[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[k]z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\rho/z)^k$$

não converge para nenhum z. O artifício utilizado para resolver essa classe de equações a diferenças utilizando transformada Z consiste em alterar o problema impondo que $y[n] = 0$ para $n < 0$, e que $y[n]$ satisfaz a equação para $n \geq 0$. Dessa forma, $\mathscr{Z}\{y[n]u[n]\}$ existe e é dada por

$$\mathscr{Z}\{y[n]u[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[k]u[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (\rho/z)^k = \frac{z}{z-\rho} \ , \ |z| > |\rho|$$

Resolução por Transformada Z

Três propriedades da transformada Z são relevantes para a resolução das equações a diferenças lineares com coeficientes constantes.

Propriedade 1 (Deslocamento à Esquerda (avanço))

$$\mathscr{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m \mathscr{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{m-k} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

Exemplo 1.6

Para $y[n] = y[n]u[n]$ e $x[n] = x[n]u[n]$, tem-se

$$y[n+2] + \alpha_1 y[n+1] + \alpha_0 y[n] = \beta_1 x[n+1] + \beta_0 x[n]$$

$$z^2 Y(z) - z^2 y[0] - zy[1] + \alpha_1 (zY(z) - zy[0]) + \alpha_0 Y(z) = \beta_1 (zX(z) - zx[0]) + \beta_0 X(z)$$

$$(z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0) Y(z) = (\beta_1 z + \beta_0) X(z) + (z^2 + \alpha_1 z) y[0] + zy[1] - \beta_1 zx[0]$$

A função de transferência $H(z)$ é dada por ($y[0] = y[1] = 0$ e $x[0] = 0$)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\beta_1 z + \beta_0}{z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0}$$

Combinatória

Propriedade 2 (Combinatória)

$$\mathscr{Z}\left\{\begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix} a^n u[n]\right\} = \frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}} \quad , \quad m \in \mathbb{N} \quad , \quad |z| > |a|$$

Exemplo 1.7

$$\mathscr{Z}\{na^n u[n]\} = \frac{z^2}{(z-a)^2} - \frac{z}{z-a} = \frac{az}{(z-a)^2} \ , \ |z| > |a|$$

pois

$$\mathscr{Z}\left\{\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} a^n u[n]\right\} = \mathscr{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a}$$

$$\mathscr{Z}\left\{\begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix} a^n u[n]\right\} = \mathscr{Z}\{(n+1)a^n u[n]\} = \frac{z^2}{(z-a)^2}$$

Exemplo 1.8

$$\mathscr{Z}\{n^2 a^n u[n]\} = \frac{az^2 + a^2 z}{(z-a)^3} \ , \ |z| > |a| \ \text{ pois}$$

$$\mathscr{Z}\left\{ \begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix} a^n u[n] \right\} = \mathscr{Z}\left\{ \frac{(n+2)(n+1)}{2} a^n u[n] \right\} = \frac{z^3}{(z-a)^3}$$

Propriedade 3 (Combinatória com Deslocamento)

$$\mathscr{Z}\left\{\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right) a^{n-m}u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}} \quad , \quad m \in \mathbb{N} \quad , \quad |z| > |a|$$

O resultado pode ser demonstrado pela aplicação da propriedade de deslocamento de m à direita na Propriedade 2 (implica na multiplicação por z^{-m}). Observe que

$$\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right) u[n-m] = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} u[n-m] = \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right) u[n]$$

pois no numerador aparece a multiplicação por zero sempre que $n < m$.

A propriedade é utilizada no cálculo de transformada Z inversa a partir de frações parciais.

Exemplo 1.9 (Progressão geométrica)

$$y[n+1] = \rho y[n], \quad y[0] = 1\ ,\ \rho > 0$$

Multiplicando por $u[n]$ e aplicando a transformada Z, tem-se

$$\mathscr{Z}\{y[n+1]u[n]\} = \rho\mathscr{Z}\{y[n]u[n]\} \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \frac{z}{z-\rho}$$

com domínio $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, |z| > \rho\}$ (série à direita).

Fazendo a divisão de polinômios (algoritmo de Briot-Ruffini), obtém-se a série

$$\frac{z}{z-\rho} = 1 + \rho z^{-1} + \rho^2 z^{-2} + \cdots$$

Comparando-se com a definição da transformada Z de $\rho^n u[n]$, obtém-se

$$y[n] = \mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-\rho}\right\} = \rho^n u[n]$$

O mesmo resultado poderia ser obtido pela aplicação da Propriedade 3 (combinatória com deslocamento) para $m = 0$.

Exemplo 1.10 (Soma geométrica)

A soma geométrica $y[n] = \sum_{k=0}^{n} \rho^k$, pode ser obtida pela resolução da equação a diferenças

$$y[n+1] - y[n] = \rho^{n+1}, \quad y[0] = 1$$

Multiplicando por $u[n]$ e aplicando a transformada Z

$$zY(z) - zy[0] - Y(z) = \frac{\rho z}{z-\rho}$$

Para $\rho \neq 1$, tem-se

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-\rho)(z-1)} \quad , \quad |z| > \max\{|\rho|, 1\}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-\rho)(z-1)} = \frac{a}{z-\rho} + \frac{b}{z-1}$$

$$a = -\frac{\rho}{1-\rho} \quad , \quad b = \frac{1}{1-\rho}$$

Exemplo 1.11 (Soma geométrica)

Usando a Propriedade 3 (combinatória com deslocamento), tem-se

$$y[n] = a\rho^n u[n] + bu[n] = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} u[n]$$

Esse resultado também pode ser obtido da definição de $y[n]$, observando-se que

$$y[n] - \rho y[n] = \sum_{k=0}^{n} \rho^k - \rho \sum_{k=0}^{n} \rho^k = 1 - \rho^{n+1} \quad \Rightarrow \quad y[n] = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}$$

Para $\rho = 1$, tem-se

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2} \Rightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{a}{(z-1)} + \frac{b}{(z-1)^2} \quad \Rightarrow \quad a = 1 \ , \ b = 1$$

$$y[n] = (1+n)u[n] = \sum_{k=0}^{n} 1$$

Exemplo 1.12 (Soma aritmética)

A soma aritmética $y[n] = \sum_{k=0}^{n} k$, pode ser obtida pela resolução da equação a diferenças $y[n+1] - y[n] = n+1, \quad y[0] = 0$.

Multiplicando por $u[n]$, aplicando transformada Z e a Propriedade 2 com $m=1$, tem-se

$$zY(z) - zy[0] - Y(z) = \mathscr{Z}\{(n+1)u[n]\} = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)^3} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{(z-1)^2} + \frac{a_3}{(z-1)^3} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1$$

Pela Propriedade 3,

$$y[n] = \binom{n}{1} u[n] + \binom{n}{2} u[n] = \frac{n(n+1)}{2} u[n]$$

Observe que esse resultado pode ser obtido somando-se membro a membro a sequência $0, 1, 2, \ldots, n$ nos sentidos direto e reverso e constatando-se que a soma consiste de $n+1$ termos de valor constante n. Portanto a soma total produz $2y[n] = n(n+1)$.

Exemplo 1.13 (Soma aritmética-geométrica)

A soma aritmética-geométrica $y[n] = \sum_{k=0}^{n} k\rho^k$, pode ser obtida pela resolução da equação a diferenças $y[n+1] - y[n] = (n+1)\rho^{n+1}$, $y[0] = 0$ (multiplicando por $u[n]$ e aplicando a transformada Z). Para $\rho \neq 1$, tem-se

$$zY(z) - zy[0] - Y(z) = \frac{\rho z^2}{(z-\rho)^2}, \; Y(z) = \frac{\rho z^2}{(z-1)(z-\rho)^2}, \; |z| > \max\{|\rho|, 1\}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{\rho z}{(z-1)(z-\rho)^2} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-\rho} + \frac{c}{(z-\rho)^2}$$

cujos coeficientes são $a = \dfrac{\rho}{(1-\rho)^2}$, $b = \dfrac{-\rho}{(1-\rho)^2}$, $c = \dfrac{-\rho^2}{(1-\rho)}$. Portanto,

$$\begin{aligned} y[n] &= au[n] + b\rho^n u[n] + c \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \rho^{n-1} u[n] = \left(a + b\rho^n + cn\rho^{n-1}\right) u[n] \\ &= \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \left(1 - (n+1)\rho^n + n\rho^{n+1}\right) u[n] \end{aligned}$$

Para $\rho = 1$, o problema se reduz ao de soma aritmética.

Exemplo – Sequência de Fibonacci

Exemplo 1.14 (Sequência de Fibonacci)

A sequência de Fibonacci é uma sequência de números inteiros em que cada elemento é obtido pela soma dos dois anteriores. A equação descreve uma população de casais de coelhos, composta de casais adultos e filhotes. Cada casal adulto gera um casal de filhotes todo mês, e o casal de filhotes torna-se fértil (adulto) com dois meses de vida. No mês n, $a[n]$ é o número de casais adultos e $f[n]$ é o número de casais de filhotes com um mês de vida. Supondo que não ocorram mortes, tem-se

$$a[n+1] = a[n] + f[n] \quad , \quad f[n+1] = a[n]$$

Denominando $y[n]$ qualquer uma das variáveis de estado, obtém-se a equação a diferenças

$$y[n+2] = y[n+1] + y[n] \quad , \quad y[0] = 0, \; y[1] = 1$$

Usando o operador p, tem-se

$$D(p)y[n] = (p^2 - p - 1)y[n] = 0$$

Exemplo – Sequência de Fibonacci

Exemplo 1.15 (Sequência de Fibonacci)

sendo $D(p)$ o polinômio característico da equação a diferenças. Multiplicando por $u[n]$ e aplicando a transformada Z, tem-se

$$z^2(Y(z) - y[0] - y[1]z^{-1}) = z(Y(z) - y[0]) + Y(z) \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

As raízes do denominador (ou seja, raízes de $D(p) = 0$) são

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} = \frac{a_1}{z-\lambda_1} + \frac{a_2}{z-\lambda_2}$$

cujos coeficientes são

$$a_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.447 \quad , \quad a_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

resultando em $y[n] = \left(a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n\right)u[n] \ \approx \ a_1\lambda_1^n u[n]$ para n grande, pois $|\lambda_2| < 1$

Curiosidades sobre a sequência de Fibonacci

A raiz característica

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

chamada na literatura de razão áurea, possui várias interpretações interessantes, algumas de valor estético. A Figura 1, composta por retângulos, foi construída a partir do retângulo do canto superior esquerdo, de base 1 e altura φ. Copiando, rodando de 90 graus a direita, colocando ao lado do primeiro e completando, tem-se um retângulo de base $1+\varphi$ e altura φ. Observe que é preservada a relação

$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1+\varphi}{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \varphi^2 = \varphi + 1$$

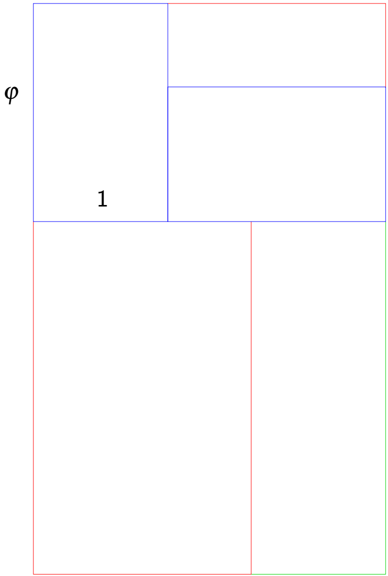
ou seja, φ satisfaz a equação característica de Fibonacci.

Essa mesma relação aparece em várias construções arquitetônicas, como por exemplo na Grécia antiga. A Figura 1 mostra mais uma iteração, resultando no retângulo de base $1+\varphi$ e altura $1+2\varphi$, que preserva a relação, pois

$$\frac{1+2\varphi}{1+\varphi} = \frac{\varphi}{1}$$

O processo pode ser repetido indefinidamente.

Curiosidades sobre a sequência de Fibonacci



Exemplo 1.16 (Tabela Price)

Determine o valor mensal da dívida $y[n]$ de um empréstimo inicial de valor M, com pagamento mensal constante igual a γ e juros mensais percentuais α para que a dívida seja liquidada em m meses. Esse problema é conhecido como cálculo da tabela Price.

$$y[n+1] = y[n](1+\alpha) - \gamma \quad , \quad y[0] = M$$
$$zY(z) - zM = Y(z)(1+\alpha) - \frac{\gamma z}{z-1}$$
$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{zM - M - \gamma}{(z-(1+\alpha))(z-1)} = \frac{a_1}{z-(1+\alpha)} + \frac{a_2}{z-1}$$

cujos coeficientes são $a_1 = (M\alpha - \gamma)/\alpha$, $a_2 = \gamma/\alpha$. Portanto, $y[n] = (a_1(1+\alpha)^n + a_2)\,u[n]$. Observe que a dívida permanece igual a M se apenas os juros forem pagos todo mês, ou seja, $M\alpha = \gamma$ (situação ideal para o credor). Obviamente, a situação ideal para o devedor seria $M = 0$. A solução do problema, isto é, o valor de γ que produz $y[m] = 0$, é

$$\gamma = \frac{M\alpha(1+\alpha)^m}{(1+\alpha)^m - 1}$$ Para $\alpha = 0$, por l'Hôpital, obtém-se $\gamma = M/m$.

Exemplo 1.17

Considere a equação a diferenças

$$y[n+2]-3y[n+1]+2y[n]=1 \qquad y[0]=0,\ y[1]=0$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)^2(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^2}$$

$$y[n]=(2^n-1-n)u[n]$$

Exemplo 1.18 (Equação a diferenças com $N(p) \neq 1$)

Considere a equação a diferenças

$$y[n+2]+5y[n+1]+6y[n]=3x[n+1]+x[n] \quad , \quad y[0]=1, y[1]=2$$

Aplicando a transformada Z (para $x[n]=x[n]u[n]$ e $y[n]=y[n]u[n]$), tem-se

$$(z^2+5z+6)Y(z)=(3z+1)X(z)-3zx[0]+(z^2+5z)y[0]+zy[1]$$

e, para $x[n]=(-2)^n u[n]$, substituindo-se as condições iniciais, tem-se

$$(z^2+5z+6)Y(z)=\frac{(3z+1)z}{z+2}+z^2+4z \quad \Rightarrow \quad \frac{(3z+1)z}{(z+2)^2(z+3)}+\frac{z^2+4z}{(z+2)(z+3)}$$

Decompondo $Y(z)/z$ em frações parciais, tem-se

$$Y(z)=-\frac{8z}{z+3}+\frac{8z}{z+2}-\frac{5z}{(z+2)^2}-\frac{z}{z+3}+\frac{2z}{z+2}$$

e, aplicando a transformada Z inversa e agrupando,

$$y[n]=\big(-9(-3)^n+10(-2)^n-5n(-2)^{n-1}\big)u[n]$$

Note que a entrada $x[n]$ poderia ser substituída na equação original, levando à equação a diferenças

$$y[n+2]+5y[n+1]+6y[n]=-5(-2)^n \quad , \quad y[0]=1, y[1]=2$$

Multiplicando por $u[n]$ e aplicando a transformada Z, tem-se

$$(z^2+5z+6)Y(z)=\frac{-5z}{z+2}+z^2+7z$$

Isolando $Y(z)$ e decompondo $Y(z)/z$ em frações parciais, chega-se ao mesmo resultado.

Exemplo 1.19 (Resposta ao impulso)

A resposta ao impulso do sistema (pressupõe condições iniciais nulas)

$$y[n+1]-\rho y[n]=\delta[n] \quad \Rightarrow \quad (p-\rho)y[n]=\delta[n]\ ,\ y[0]=0$$

pode ser obtida pela transformada Z, isto é, obtém-se a função de transferência

$$H(z)=\frac{1}{z-\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{H(z)}{z}=\frac{1}{z(z-\rho)}=\frac{-1/\rho}{z}+\frac{1/\rho}{z-\rho}$$

e a resposta ao impulso é dada pela transformada Z inversa de $H(z)$

$$h[n]=(-1/\rho)\delta[n]+(1/\rho)\rho^{n}u[n]=\rho^{n-1}u[n-1]$$

Exemplo 1.20 (Resposta ao degrau)

A resposta ao degrau do sistema, para $\rho \neq 1$, (pressupõe condições iniciais nulas)

$$y[n+1] - \rho y[n] = u[n] \quad \Rightarrow \quad (p-\rho)y[n] = u[n] \ , \ y[0] = 0$$

pode ser obtida pela transformada Z, isto é,

$$Y(z) = \frac{z}{(z-\rho)(z-1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-\rho)(z-1)} = \frac{a}{(z-\rho)} + \frac{b}{z-1}$$

com $-a = b = \frac{1}{1-\rho}$, e, portanto, $y[n] = (1-\rho^n)/(1-\rho)u[n]$. Note que, como $u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$, tem-se que a solução $y[n]$ é a soma até n da resposta ao impulso do Exercício 1.19, isto é,

$$y[n] = \left(\sum_{k=-\infty}^{n} \rho^{k-1} u[k-1] \right) u[n] = \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} \rho^{\ell} \right) u[n] = \frac{1-\rho^n}{1-\rho} u[n]$$

Além disso, como $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$ tem-se que a solução do Exercício 1.19 pode ser escrita como

$$h[n] = y[n] - y[n-1] = \rho^{n-1} u[n-1]$$

Resolução pelo Método dos Coeficientes a Determinar

Equações a diferenças lineares com coeficientes constantes podem ser resolvidas pelo método dos coeficientes a determinar.

Equação homogênea

Considere a equação a diferenças homogênea

$$D(p)y[n] = 0 \quad , \quad D(p) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k \tag{1}$$

com $\alpha_m = 1$ e condições iniciais conhecidas, que descreve um sistema linear autônomo.

Observe que a equação é uma restrição linear (combinação linear das funções $y[n]$, $y[n+1]$, ..., $y[n+m]$) e portanto a solução $y[n]$ deve necessariamente estar em um espaço de dimensão m.

Independência Linear

Definição 2 (Independência Linear)

Um conjunto de sinais $\{y_k[n], k = 1, \ldots, m\}$ *é linearmente independente se e somente se*

$$\sum_{k=1}^{m} c_k y_k[n] = 0 \ , \ \forall n \quad \Rightarrow \quad c_k = 0 \ , \ k = 1, \ldots, m$$

Definição 3 (Base)

A combinação linear de um conjunto de m sinais $y_k[n]$*, isto é,*

$$y[n] = \sum_{k=1}^{m} c_k y_k[n]$$

com escalares $c_k \in \mathbb{C}$ *gera um espaço linear, cuja dimensão é dada pelo número* $r \leq m$ *de sinais linearmente independentes. Qualquer conjunto de r sinais que gere o mesmo espaço é uma base para esse espaço.*

Exemplo

Exemplo 1.21

Os sinais

$$y_1[n] = 1, \; y_2[n] = n, \; y_3[n] = n^2$$

são linearmente independentes. De fato,

$$c_1 y_1[n] + c_2 y_2[n] + c_3 y_3[n] = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0, \quad \text{pois} \;\; \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$$

Independência Linear

Propriedade 4 (Independência Linear)

$$y_1[n] = \lambda_1^n, \; y_2[n] = \lambda_2^n$$

são linearmente independentes se e somente se

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

Note que $a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n = 0, \; \forall n$, *implica*

$$\left.\begin{array}{c} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = 0$$

Deslocamento de auto-função

Propriedade 5 (Deslocamento de auto-função)

As funções

$$y_1[n] = \lambda^n \quad , \quad y_2[n] = y_1[n+k]$$

são linearmente dependentes, pois

$$y_2[n] = \lambda^k \lambda^n$$

Propriedade 6 (Modo próprio)

A sequência $y[n] = \lambda^n$ *é solução da equação (1) se* λ *é raiz de* $D(\lambda) = 0$ *(equação característica), pois*

$$D(p)\lambda^n = D(\lambda)\lambda^n = 0$$

Observe que a solução é válida para todo $n \in \mathbb{Z}$*.*

Exemplo 1.22

Para $D(p) = p^2 - p - 1$, tem-se

$$D(p)\lambda^n = (p^2 - p - 1)\lambda^n = \lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} - \lambda^n = (\lambda^2 - \lambda - 1)\lambda^n$$

Propriedade 7 (Modos próprios)

Se as m raízes λ_k de $D(\lambda) = 0$ forem distintas, então

$$y[n] = \sum_{k=1}^{m} a_k \lambda_k^n$$

é solução da equação (1) pois λ_k satisfaz $D(\lambda_k) = 0$, $k = 1, \ldots, m$ e os modos próprios λ_k^n, $k = 1, \ldots, m$ são linearmente independentes.

Raiz dupla

Propriedade 8 (Raiz dupla)

Se λ é raiz dupla da equação característica $D(\lambda) = 0$, então λ^n e $n\lambda^n$ são modos próprios da equação (1).

Prova:

$$D(p)(n\lambda^n) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k (n\lambda^n) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k (n+k)\lambda^{n+k} =$$

$$= n\lambda^n \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \lambda^k + \lambda^{n+1} \sum_{k=0}^{m} \alpha_k k \lambda^{k-1} = n\lambda^n D(\lambda) + \lambda^{n+1} \frac{d}{dp} D(p)\Big|_{p=\lambda} = 0$$

pois $D(\lambda) = 0$ *e* $\frac{d}{dp} D(p)\Big|_{p=\lambda} = 0$ *quando* λ *é raiz dupla de* $D(\lambda)$.

Exemplo 1.23

Para $D(p) = (p-\lambda)^2$, tem-se

$$(p-\lambda)^2\lambda^n = 0$$

e, além disso,

$$(p-\lambda)^2 n\lambda^n = (p^2 - 2\lambda p + \lambda^2) n\lambda^n = (n+2)\lambda^{n+2} - 2\lambda(n+1)\lambda^{n+1} + \lambda^2 n\lambda^n =$$

$$= \left(\lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2\right) n\lambda^n + 2(\lambda - \lambda)\lambda^{n+1} = 0$$

Propriedade 9 (Raiz múltipla)

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então λ^n, $n\lambda^n$, ..., $n^{r-1}\lambda^n$ são modos próprios da equação (1).

Propriedade 10 (Solução da Homogênea)

A solução da equação homogênea (1) de ordem m é dada pela combinação linear dos seus m modos próprios, considerando as eventuais multiplicidades das raízes características.

Exemplo 1.24

Considere a equação a diferenças

$$D(p)y[n] = (p - \rho)y[n] = 0 \quad , \quad y[0] = 1$$

A raiz da equação característica é $\lambda = \rho$, e portanto

$$y[n] = a\rho^n$$

sendo a o coeficiente a determinar. Das condições iniciais, $a = y[0] = 1$.

Exemplo 1.25

Considere a equação a diferenças do Exemplo 1.14 (Fibonacci)

$$D(p)y[n] = (p^2 - p - 1)y[n] = 0 = (p - \lambda_1)(p - \lambda_2)y[n] = 0 \quad , \quad y[0] = 0 \ , \ y[1] = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

A equação característica é $D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$. A solução é dada por

$$y[n] = a_1 \lambda_1^n + a_2 \lambda_2^n$$

Das condições iniciais, $a_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $a_2 = \dfrac{-\sqrt{5}}{5}$

Exemplo 1.26

Considere a equação a diferenças, com $\rho \neq 1$,

$$D(p)y[n] = (p-1)(p-\rho)y[n] = 0 \quad , \quad y[0] = 1 \; , \; y[1] = 1+\rho$$

A solução é

$$y[n] = a_1(1)^n + a_2\rho^n = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}$$

Exemplo 1.27

Considere a equação a diferenças

$$D(p)y[n] = (p-1)^3 y[n] = 0 \quad , \quad y[0] = 0 \; , \; y[1] = 1 \; , \; y[2] = 3$$

com $\lambda = 1$ raiz tripla da equação característica. A solução é

$$y[n] = a_1(1)^n + a_2 n(1)^n + a_3 n^2(1)^n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemplo 1.28

Considere a equação a diferenças, com $\rho \neq 1$,

$$D(p)y[n] = (p-1)(p-\rho)^2 y[n] = 0 \quad , \quad y[0] = 0 \ , \ y[1] = \rho \ , \ y[2] = \rho + 2\rho^2$$

A solução é

$$y[n] = a_1(1)^n + a_2\rho^n + a_3 n\rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}(1-\rho^n) - \frac{\rho}{1-\rho} n\rho^n$$

Exemplo 1.29

Considere a equação a diferenças, com $\alpha \neq 0$,

$$D(p)y[n] = (p-1)(p-(1+\alpha))y[n] = 0 \quad , \quad y[0] = M \ , \ y[1] = M(1+\alpha) - \gamma$$

A solução é

$$y[n] = a_1(1)^n + a_2(1+\alpha)^n = \frac{\gamma}{\alpha} + \left(M - \frac{\gamma}{\alpha}\right)(1+\alpha)^n$$

Exemplo 1.30

Considere o sistema modal descrito pelas equações a diferenças

$$v_1[n+1] = \alpha v_1[n] - \beta v_2[n] \quad , \quad v_2[n+1] = \alpha v_2[n] + \beta v_1[n] \quad , \quad \alpha > 0 \ , \ \beta > 0$$

O polinômio característico de segunda ordem (associado a $v_1[n]$ ou a $v_2[n]$) é

$$D(p) = p^2 - 2\alpha p + \alpha^2 + \beta^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^* = \lambda_1 = \rho \exp(j\theta) = \alpha + j\beta \ , \ \rho > 0$$

e a solução é dada por

$$a_1 \lambda_1^n + a_2 \lambda_2^n \quad , \quad a_2^* = a_1 = \frac{A}{2} \exp(j\phi)$$

com a_1, a_2 (ou A e ϕ) determinados pelas condições iniciais. Note que a solução pode ser reescrita como

$$A\rho^n \cos(\theta n + \phi)$$

e, portanto, diverge para $\rho > 1$ (comportamento instável). Pode ser também observado que, mesmo para $\alpha < 1$ (subsistemas desacoplados estáveis), o valor de β pode instabilizar o sistema.

Equação não homogênea

Considere a equação a diferenças não homogênea

$$D(p)y[n] = N(p)x[n] \quad , \quad D(p) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k \ , \ N(p) = \sum_{k=0}^{\ell} \beta_k p^k \tag{2}$$

com $\alpha_m = 1$ e condições iniciais conhecidas, que descreve um sistema linear não autônomo.

A equação (2) pode ser resolvida pelo método dos coeficientes a determinar sempre que $x[n]$ for solução de uma equação a diferenças homogênea dada por

$$\bar{D}(p)x[n] = 0$$

O polinômio $\bar{D}(p)$ define os modos do espaço que contém $x[n]$. Portanto, multiplicando a equação (2) dos dois lados por $\bar{D}(p)$, tem-se a equação homogênea

$$\bar{D}(p)D(p)y[n] = N(p)\bar{D}(p)x[n] = 0$$

que contém os modos próprios de $D(p)$ e os modos forçados de $\bar{D}(p)$.

As condições iniciais que permitem a solução desse sistema aumentado são as originais acrescidas de tantas quanto for o grau de $\bar{D}(p)$, obtidas por substituição sistemática na equação (2).

Exemplo

Exemplo 1.31

Considere a equação a diferenças da soma geométrica

$$y[n+1]-y[n]=\rho^{n+1} \quad , \quad y[0]=1$$

Neste caso

$$D(p)=p-1 \;\text{ e }\; \bar{D}(p)=p-\rho \quad , \quad y[0]=1 \;,\; y[1]=1+\rho$$

pois a entrada $x[n]=\rho\rho^n$ está no espaço de dimensão 1 descrito por um modo próprio associado à raiz ρ. A condição $y[1]=1+\rho$ foi obtida substituindo-se $y[0]$ na equação original.

Exemplo

Exemplo 1.32

Considere a equação a diferenças da soma aritmética

$$y[n+1]-y[n]=n+1 \quad , \quad y[0]=0$$

Neste caso

$$D(p)=(p-1) \ \text{ e } \ \bar{D}(p)=(p-1)^2 \quad , \ \ y[0]=0 \ , \ y[1]=1 \ , \ y[2]=3$$

pois a entrada $x[n]=n+1$ está no espaço de dimensão 2 descrito pelos modos próprios associados à raiz 1 com multiplicidade 2. As condições iniciais $y[1]$ e $y[2]$ foram obtidas da equação original por substituição.

Exemplo 1.33

Considere a equação a diferenças da soma aritmética-geométrica

$$y[n+1]-y[n]=(n+1)\rho^{n+1} \quad , \quad y[0]=0$$

Neste caso

$$D(p)=(p-1) \;\text{ e }\; \bar{D}(p)=(p-\rho)^2 \;\;,\;\; y[0]=0 \;,\; y[1]=\rho \;,\; y[2]=\rho+2\rho^2$$

pois a entrada $x[n]=(n+1)\rho^{n+1}$ está no espaço de dimensão 2 descrito pelos modos próprios associados à raiz ρ com multiplicidade 2. As condições iniciais $y[1]$ e $y[2]$ foram obtidas da equação original por substituição.

Exemplo

Exemplo 1.34

Considere a equação a diferenças da tabela Price

$$y[n+1]-(1+\alpha)y[n]=-\gamma \quad , \quad y[0]=M$$

Neste caso

$$D(p)=(p-(1+\alpha)) \ \text{ e } \ \bar{D}(p)=(p-1) \quad , \quad y[0]=M \ , \ y[1]=M(1+\alpha)-\gamma$$

pois a entrada $x[n]=-\gamma$ está no espaço de dimensão 1 descrito por um modo próprio associado à raiz 1. A condição inicial $y[1]$ foi obtida da equação original por substituição.

A equação homogênea resultante foi resolvida no Exemplo 1.29.

Exemplo 1.35

Considere novamente a equação a diferenças do Exemplo 1.18

$$(p^2+5p+6)y[n]=(3p+1)x[n] \quad , \quad y[0]=1, y[1]=2 \quad , \quad x[n]=(-2)^n$$

Portanto, $\bar{D}(p)=(p+2)$, $y[2]=3x[1]+x[0]-5y[1]-6y[0]=-21$ e

$$y[n]=2.5n(-2)^n+10(-2)^n-9(-3)^n$$

Note que a solução vale para todo $n\in\mathbb{Z}$ e coincide para $n\geq 0$ com a solução obtida por transformada Z no Exemplo 1.18.

Propriedade 11 (Solução Forçada)

O método dos coeficientes a determinar pode ser aplicado diretamente à equação a diferenças não homogênea (2). Para isso, identificam-se as parcelas homogênea e forçada (devido à entrada) da solução.

$$y[n] = y_h[n] + y_f[n] \quad \Rightarrow \quad D(p)\big(y_h[n] + y_f[n]\big) = N(p)x[n]$$

$$D(p)y_f[n] = N(p)x[n] \tag{3}$$

pois $D(p)y_h[n] = 0$*. As parcelas homogênea e forçada são dadas por*

$$y_h[n] = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k[n] \quad , \quad y_f[n] = \sum_{k=1}^{\bar{m}} b_k g_k[n]$$

sendo $f_k[n]$ *os* m *modos próprios associados a* $D(\lambda) = 0$ *e* $g_k[n]$ *os* $\bar{m}$ *modos forçados associados a* $\bar{D}(\gamma) = 0$*, considerando-se as possíveis multiplicidades com as raízes* λ*.*

Os coeficientes b_k *são obtidos da equação (3) e, em seguida, os coeficientes* a_k *são obtidos a partir das condições iniciais.*

Exemplo 1.36

Considere a equação a diferenças dada por

$$y[n+1]-y[n]=\rho^{n+1} \quad , \quad y[0]=1 \quad \Rightarrow \quad D(p)=p-1 \ , \ \bar{D}(p)=(p-\rho)$$

Para $\rho \neq 1$, tem-se $\lambda=1$ e $\gamma=\rho$ (raízes distintas). A solução forçada é

$$y_f[n]=b\rho^n \quad \Rightarrow \quad (b\rho-b)\rho^n=\rho^{n+1} \quad , \quad b=\frac{\rho}{\rho-1}$$

A solução é $y[n]=b\rho^n+a$. Da condição inicial $y[0]=1$, tem

$$1=b+a \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{1-\rho}$$

Para $\rho=1$, ocorre o fenômeno conhecido como ressonância (modo próprio excitado pelo modo da entrada). Neste caso, tem-se

$$\lambda=\gamma=1 \quad \Rightarrow \quad y_f[n]=bn1^n \ , \ b=1$$

A solução é (usando-se a condição inicial): $y[n]=bn+a=n+1$

Exemplo 1.37 (Soma aritmética)

A soma aritmética satisfaz a equação a diferenças

$$y[n+1]-y[n]=n+1 \quad , \quad y[0]=0 \quad \Rightarrow \quad D(p)=p-1 \ , \ \bar{D}(p)=(p-1)^2$$

Trata-se de uma ressonância dupla, $\lambda=\gamma_1=\gamma_2=1$. Portanto,

$$y_f[n]=b_1 n^2+b_2 n \quad \Rightarrow \quad b_1=b_2=0.5$$

A solução é (usando-se a condição inicial)

$$y[n]=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+a=\frac{n(n+1)}{2}$$

Exemplo 1.38 (Soma aritmética-geométrica)

A soma aritmética-geométrica, tratada no Exemplo 1.13, satisfaz a equação a diferenças

$$y[n+1]-y[n]=(n+1)\rho^{n+1} \quad , \quad y[0]=0 \quad \Rightarrow \quad D(p)=p-1 \ , \ \bar{D}(p)=(p-\rho)^2$$

Para $\rho \neq 1$, tem-se $\lambda = 1$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = \rho$ (raiz dupla). Portanto,

$$y_f[n] = b_1 n\rho^n + b_2\rho^n \quad \Rightarrow \quad b_1 = \frac{\rho}{\rho-1} \ , \ b_2 = \frac{-\rho}{(\rho-1)^2}$$

A solução é (usando-se a condição inicial)

$$y[n] = b_1 n\rho^n + b_2\rho^n + a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\rho}{(\rho-1)^2}$$

Exemplo 1.39

Considere a equação a diferenças

$$y[n+2]-3y[n+1]+2y[n]=1 \quad y[0]=0,\ y[1]=0 \quad \Rightarrow$$
$$D(p)=(p-1)(p-2)\ ,\ \bar{D}(p)=p-1$$

Note que $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ e $\gamma=1$ (ressonância). A solução forçada é

$$y_f[n]=bn \quad \Rightarrow \quad b=-1$$

A solução é (usando-se as condições iniciais)

$$y[n]=-n+a_1+a_2 2^n \quad \Rightarrow \quad a_1=-1,\ a_2=1$$

Propriedade 12 (Resposta ao Impulso)

$$D(p)y[n] = N(p)x[n] \quad , \quad x[n] = \delta[n] \quad \textit{(condições iniciais nulas)}$$

A priori, o método dos coeficientes a determinar não poderia ser utilizado para determinar $y[n]$ pois não existe equação a diferenças linear com coeficientes constantes que produza como solução a função $\delta[n]$, isto é, $\delta[n+k]$ é linearmente independente de $\delta[n]$ qualquer que seja $k \neq 0$.

Entretanto, a resposta ao impulso pode ser calculada pelo método dos coeficientes a determinar da seguinte forma. Primeiramente, resolva

$$D(p)f[n] = 1 \ , \quad \textit{(condições iniciais nulas)}$$

Por linearidade, tem-se

$$y[n] = N(p)\big(f[n]u[n] - f[n-1]u[n-1]\big)$$

Note que a resposta ao degrau é dada por $N(p)f[n]u[n]$.

Exemplo

Exemplo 1.40

Calculando a resposta ao degrau da equação a diferenças

$$(p-\rho)y[n] = u[n] \ , \ y[0] = 0 \quad \Rightarrow \quad (p-\rho)f[n] = 1 \ \ (\lambda = \rho, \gamma = 1)$$

$$f[n] = b_1 + a_1\rho^n \quad , \quad b_1 - \rho b_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad b_1 = \frac{1}{1-\rho} \ , \ a_1 = -b_1$$

$$y[n] = f[n]u[n] = \frac{1-\rho^n}{1-\rho}u[n]$$

A resposta ao impulso é

$$y[n] - y[n-1] = \rho^{n-1}u[n-1]$$

Exemplo

Exemplo 1.41

Considere

$$(p-2)(p-3)y[n] = px[n] \quad , \quad x[n] = \delta[n] \ , \ \text{(condições iniciais nulas)}$$

$$(p-2)(p-3)f[n] = 1 \quad \Rightarrow \quad f[n] = b_1 + a_1 2^n + a_2 3^n \ , \ b_1 = 0.5 \ , \ a_1 = -1 \ , \ a_2 = 0.5$$

A resposta ao degrau é dada por

$$y_u[n] = pf[n]u[n] = \left(\frac{1}{2} - 2^{n+1} + \frac{1}{2}3^{n+1}\right)u[n+1]$$

e a resposta ao impulso é

$$\begin{aligned} h[n] = pf[n]u[n] - pf[n-1]u[n-1] &= f[n+1]u[n+1] - f[n]u[n] \\ &= (f[n+1] - f[n])u[n] = (-2^n + 3^n)u[n] \end{aligned}$$

Note que as respostas ao degrau e ao impulso poderiam ser obtidas por transformada Z com menor trabalho algébrico.

A resposta ao impulso é a transformada Z inversa de $H(z)$, ou seja

$$H(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)} \quad \Rightarrow \quad \frac{H(z)}{z} = \frac{-1}{z-2} + \frac{1}{z-3} \quad , \quad h[n] = (-2^n + 3^n)u[n]$$

e a resposta ao degrau

$$Y_u(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)}\frac{z}{(z-1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y_u(z)}{z} = \frac{-2}{z-2} + \frac{3/2}{z-3} + \frac{1/2}{z-1}$$

$$y_u[n] = \left(-2(2^n) + \frac{3}{2}(3^n) + \frac{1}{2}\right)u[n]$$