Livro (e-book): Linearidade em Sinais e Sistemas, Ivanil S. Bonatti, Amauri Lopes, Pedro L. D. Peres, Cristiano M. Agulhari,

Ed. Blucher, SP, 2015, 1ed., ISBN: 9788521208921.

Prof. Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Equações de Estado de Sistemas Discretos

Sistemas dinâmicos discretos

Podem ser descritos por equações a diferenças (envolvendo entrada e saída) ou por equações de estado (modelo de variáveis de estado ou modelo interno).

Definição 1 (Representação canônica por variáveis de estado)

Sistemas discretos no tempo com uma entrada escalar $x[n]$ e uma saída escalar $y[n]$ são chamados de sistemas SISO (single-input single-output)*. Podem ser descritos por equações de primeira ordem nas variáveis de estado*

$$v[n+1] = f(v[n], x[n], n) \quad , \quad y[n] = g(v[n], x[n], n) \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

sendo $v[n] \in \mathbb{R}^m$ o vetor de variáveis de estado.

As sequências $v[n]$, soluções de (1), são determinadas de maneira única a partir da condição inicial $v[0] \in \mathbb{R}^m$ e da entrada $x[n]$.

Variáveis de estado

Exemplo 1.1

Um modelo para a ocorrência de um gene recessivo na geração $n+1$ é dado por

$$v[n+1] = \frac{v[n]}{1+v[n]} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

sendo $v[n]$ a frequência de ocorrência na geração n.

A partir de uma condição inicial $v[0] = a$, tem-se

$$v[1] = \frac{a}{1+a} \quad , \quad v[2] = \frac{v[1]}{1+v[1]} = \frac{a}{1+2a} \quad \Rightarrow \quad v[n] = \frac{a}{1+na}$$

Exemplo 1.2

O montante de depósitos em uma conta bancária no ano $n+1$ pode ser descrito pela equação

$$v[n+1] = (1+\beta)v[n] + b$$

sendo b um depósito constante e β o rendimento percentual pago pelo banco anualmente sobre o valor $v[n]$. Considerando como condição inicial $v[0] = 0$, tem-se

$$v[n] = \frac{\big((1+\beta)^n - 1\big)b}{\beta}$$

Definição 2 (Pontos de equilíbrio ou pontos fixos)

Os vetores $\bar{v}$ solução do sistema de equações invariante no tempo

$$\bar{v} = f(\bar{v}, \bar{x})$$

para $x[n] = \bar{x}$ constante são denominados pontos de equilíbrio ou pontos fixos do mapeamento.

Exemplo 1.3

Considere a equação logística abaixo (semelhante à equação a diferenças que descreve a população de peixes em um lago):

$$v[n+1] = \beta v[n](1 - v[n]), \quad \beta > 0$$

Os pontos de equilíbrio são

$$\bar{v} = 0 \quad , \quad \bar{v} = \frac{\beta - 1}{\beta}$$

Note que para condições iniciais $v[0] \in [0,1]$ e $0 \leq \beta \leq 4$, a sequência $v[n]$ permanece no intervalo. A Figura 1 ilustra dois comportamentos para $v[n]$, com $\beta = 2$, a partir de 0.01 e de 0.95, em direção ao ponto fixo $\bar{v} = 0.5$. Dependendo do valor de β, $v[n]$ pode apresentar comportamento oscilatório ou mesmo caótico.

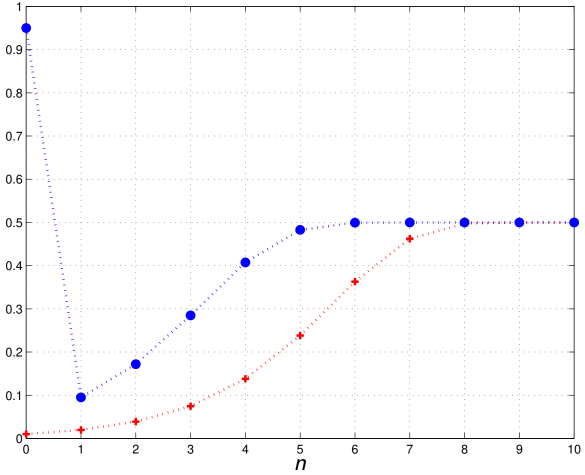

Figura: Evolução de $v[n]$ $(\beta = 2)$ a partir das condições iniciais $v[0] = 0.01$ e $v[0] = 0.95$ em direção ao ponto fixo $\bar{v} = 0.5$.

Assim como no caso contínuo, sistemas lineares invariantes no tempo SISO (*single-input single-output*) podem ser representados por equações matriciais de primeira ordem nas variáveis de estado e equações de saída

$$v[n+1] = Av[n] + bx[n]$$
$$y[n] = cv[n] + dx[n]$$

O modelo (A, b, c, d) pode também ser obtido da linearização das equações (1), representando o comportamento do sistema de maneira aproximada em torno dos pontos fixos.

Um sistema linear com entrada $x[n] = \alpha$ (constante) possui como ponto fixo $\bar{v}$ tal que

$$\bar{v} = A\bar{v} + b\alpha \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{I} - A)\bar{v} = b\alpha$$

Se $\det(\mathbf{I} - A) \neq 0$, a solução é única, dada por

$$\bar{v} = (\mathbf{I} - A)^{-1} b\alpha$$

Se $\det(\mathbf{I} - A) = 0$ e $\alpha = 0$, tem-se

$$(\mathbf{I} - A)\bar{v} = 0$$

ou seja, os pontos fixos estão no espaço nulo de $(\mathbf{I} - A)$.

Exemplo 1.4

Considere o modelo discreto predador-presa ($v_1[n]$ representa as presas, $v_2[n]$ os predadores)

$$v_1[n+1] = 2(1 - v_1[n])v_1[n] - \beta v_1[n]v_2[n]$$
$$v_2[n+1] = 0.8v_2[n] + 3\beta v_1[n]v_2[n]$$

Os pontos fixos são $(0,0)$, $(0.5,0)$ e $(0.2/(3\beta),(1-0.4/(3\beta))/\beta)$. O jacobiano do sistema é dado por

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right] = \begin{bmatrix} 2-4v_1-\beta v_2 & -\beta v_1 \\ 3\beta v_2 & 0.8+3\beta v_1 \end{bmatrix}$$

Por exemplo, para $\beta = 1/3$, têm-se os comportamentos aproximados em torno dos pontos de equilíbrio dados por

$$(0,0), \ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \text{ autovalores 2 (modo instável) e 0.8 (modo estável)}$$

$$(0.5,0), \ \begin{bmatrix} 0 & -1/6 \\ 0 & 1.3 \end{bmatrix}, \text{ autovalores 1.3 (modo instável) e 0 (modo estável)}$$

$$(0.2,1.8), \ \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2/3 \\ 1.8 & 1 \end{bmatrix}, \text{ autovalores } |0.8 \pm j0.2828| \approx 0.8485 \text{ (modos estáveis oscil.)}$$

Função de transferência e realizações

Usando a notação $pv[n] = v[n+1]$, pode-se obter a representação entrada-saída a partir da equação de estado de maneira similar ao caso contínuo, ou seja,

$$y[n] = \big(c(p\mathbf{I} - A)^{-1}b + d\big)x[n] \quad , \quad H(z) = \left.\frac{N(p)}{D(p)}\right|_{p=z} = c(z\mathbf{I} - A)^{-1}b + d$$

Para construir uma realização a partir da equação a diferenças $D(p)y[n] = N(p)x[n]$, utilizam-se as mesmas técnicas do caso contínuo.

Função de transferência e realizações

Exemplo 1.5

Considere a equação a diferenças

$$(p^3+8p^2+5p+3)y[n]=(2p^3+30p^2+15p+10)x[n]$$

Como $N(p)=2(p^3+8p^2+5p+3)+14p^2+5p+4$, tem-se uma realização dada por

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -5 & -8\end{bmatrix} \;,\; b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \;,\; c=\begin{bmatrix}4 & 5 & 14\end{bmatrix} \;,\; d=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix} \tag{2}$$

De fato,

$$c(p\mathbf{I}-A)^{-1}b+d=\frac{14p^2+5p+4}{p^3+8p^2+5p+3}+2=\frac{2p^3+30p^2+15p+10}{p^3+8p^2+5p+3}$$

A Figura 2 mostra a realização (2) com operadores avanço (i.e. $p^{-1}v[n+1]=v[n]$).

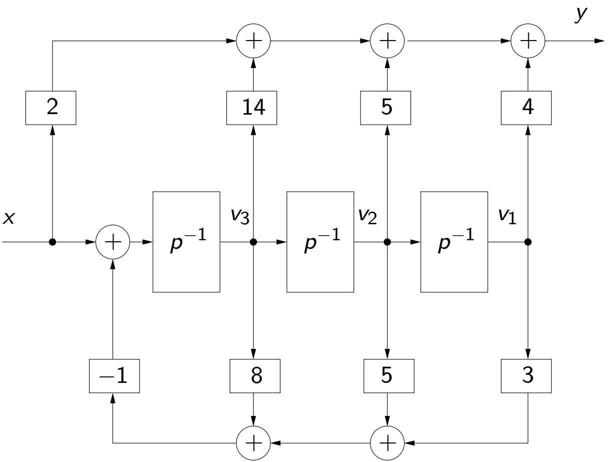

Figura: Realização (A, b, c, d) dada por (2) da função de transferência do Exemplo 1.

Solução da equação homogênea

A equação de estado $v[n+1] = Av[n]$, $v[0] = v_0 \in \mathbb{R}^m$ pode ser resolvida por substituição direta, isto é,

$$v[1] = Av[0] \quad , \quad v[2] = Av[1] = A^2 v[0] \quad \Rightarrow \quad v[n] = A^n v[0]$$

O cálculo de A^n pode ser feito por qualquer uma das técnicas existentes para cômputo de função de matriz quadrada.

Exemplo 1.6

Considere o sistema

$$v[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} v[n] \quad , \quad v[0] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, $f(A) = A^n$ pode ser calculada como um polinômio de grau 2. Assim,

$$f(\lambda) = \lambda^n = \rho_0(n) + \rho_1(n)\lambda + \rho_2(n)\lambda^2$$

$$\Rightarrow \quad \rho_0 = -2n + 2^n, \ \rho_1 = 2 + 3n - 2^{n+1}, \ \rho_2 = -1 - n + 2^n$$

Exemplo 1.6 (cont.)

e, portanto,

$$A^n = \begin{bmatrix} -2n+2^n & 2+3n-2^{n+1} & -1-n+2^n \\ -2-2n+2^{n+1} & 3n-2^{n+2}+5 & -2-n+2^{n+1} \\ -4-2n+2^{n+2} & 8+3n-2^{n+3} & -n+2^{n+2}-3 \end{bmatrix}$$

A solução $v[n]$ é dada por

$$v[n] = A^n v[0] = \begin{bmatrix} -2n+2^n \\ -2-2n+2^{n+1} \\ -4-2n+2^{n+2} \end{bmatrix}$$

Note que, neste exemplo, $\det(\mathbf{I}-A)=0$ e, portanto, $\bar{v} = \begin{bmatrix}\beta & \beta & \beta\end{bmatrix}'$, $\beta \in \mathbb{R}$, é um ponto fixo do sistema.

O sistema homogêneo pode ser resolvido por transformada Z, se multiplicados ambos os lados por $u[n]$. Assim,

$$v[n+1]u[n] = Av[n]u[n] \ , v[0]=v_0 \quad \Rightarrow \quad V(z) = (z\mathbf{I}-A)^{-1} z v_0$$

e o domínio de existência de $V(z)$, para uma condição inicial v_0 qualquer, é o exterior do menor círculo centrado na origem que contém todos os autovalores de A.

Propriedade 1

$$\mathscr{Z}\{A^n u[n]\} = (z\mathbf{I} - A)^{-1} z \quad , \quad |z| > \max_i |\lambda_i(A)|$$

pois a solução do sistema para $n \geq 0$ *é dada por* $v[n] = A^n u[n] v_0$ *para qualquer* v_0.

Exemplo 1.7

Considere o sistema

$$v[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} v[n] \quad , \quad v[0] = v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando por $u[n]$ dos dois lados e aplicando a transformada Z, tem-se

$$V(z) = (z\mathbf{I} - A)^{-1} z v_0 = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} \begin{bmatrix} z-5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix} z v_0$$

Exemplo 1.8

$$(z\mathbf{I}-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{z-5}{(z-2)(z-3)} & \dfrac{1}{(z-2)(z-3)}\\ \dfrac{-6}{(z-2)(z-3)} & \dfrac{z}{(z-2)(z-3)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{3}{(z-2)}+\dfrac{-2}{(z-3)} & \dfrac{-1}{(z-2)}+\dfrac{1}{(z-3)}\\ \dfrac{6}{(z-2)}+\dfrac{-6}{(z-3)} & \dfrac{-2}{(z-2)}+\dfrac{3}{(z-3)}\end{bmatrix}$$

Exemplo 1.9

$$V(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{3z}{(z-2)} + \dfrac{-2z}{(z-3)} & \dfrac{-1z}{(z-2)} + \dfrac{1z}{(z-3)} \\ \dfrac{6z}{(z-2)} + \dfrac{-6z}{(z-3)} & \dfrac{-2z}{(z-2)} + \dfrac{3z}{(z-3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2z}{(z-2)} - \dfrac{z}{(z-3)} \\ \dfrac{4z}{(z-2)} - \dfrac{3z}{(z-3)} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad v[n] = \begin{bmatrix} 2(2^n) - 3^n \\ 4(2^n) - 3(3^n) \end{bmatrix} u[n]$$

Note que a matriz A é diagonalizável (autovalores distintos), e que

$$AQ = Q\hat{A} \ , \ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.10

Portanto, a solução $v[n]$ pode também ser obtida por transformação de similaridade

$$v[n] = A^n v_0 = Q\hat{A}^n Q^{-1} v_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} v_0$$

$$= \begin{bmatrix} 3(2^n) - 2(3^n) & -2^n + 3^n \\ 6(2^n) - 6(3^n) & -2(2^n) + 3(3^n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2^n) - 3^n \\ 4(2^n) - 3(3^n) \end{bmatrix}$$

Finalmente, note que

$$\mathscr{Z}\{v[n]u[n]\} = \begin{bmatrix} \dfrac{2z}{z-2} - \dfrac{z}{z-3} \\ \dfrac{4z}{z-2} - \dfrac{3z}{z-3} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.11

Considere o sistema

$$v[n+1] = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 \\ 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} v[n] \quad , \quad v[0] = v_0$$

A partir do cálculo de funções de matrizes na forma de Jordan, tem-se que a solução é dada por

$$v[n] = \begin{bmatrix} \sigma^n & n\sigma^{n-1} & n(n-1)\sigma^{n-2}/2 \\ 0 & \sigma^n & n\sigma^{n-1} \\ 0 & 0 & \sigma^n \end{bmatrix} v_0$$

Solução da equação não homogênea I

De maneira similar ao caso contínuo, a solução pode ser obtida por transformada Z, por convolução ou pela definição de um sistema homogêneo aumentado equivalente. Considere o sistema

$$v[n+1] = Av[n] + bx[n] \quad , \quad v[0] = v_0 \quad , \quad y[n] = cv[n] + dx[n] \tag{3}$$

A resposta ao impulso pode ser obtida por substituição sistemática, com $x[n] = \delta[n]$ e $v[0] = 0$,

$$v[1] = b \quad , \quad v[2] = Ab \quad , \quad v[n] = A^{n-1}b \quad , \quad n > 0$$
$$\Rightarrow \quad h[n] = (cA^{n-1}b)u[n-1] + d\delta[n]$$

Note que a resposta ao impulso também pode ser obtida como a transformada Z inversa de $H(z)$, isto é,

$$\begin{aligned} h[n] &= \mathscr{Z}^{-1}\{c(z\mathbf{I} - A)^{-1}b + d\} \\ &= \mathscr{Z}^{-1}\{z^{-1}\left(c(z\mathbf{I} - A)^{-1}zb\right) + d\} = cA^{n-1}bu[n-1] + d\delta[n] \end{aligned}$$

Solução da equação não homogênea II

No domínio do tempo, a resposta a uma entrada qualquer $x[n]$ para $n \geq 0$ é dada por

$$v[n] = A^n v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} bx[k]$$

$$y[n] = cA^n v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} cA^{n-1-k} bx[k] + dx[n]$$

ou, usando a definição de convolução discreta, por

$$v[n] = A^n v_0 + (A^{n-1} u[n-1]) * (bx[n]u[n])$$

$$y[n] = cA^n v_0 + c(A^{n-1} u[n-1]) * (bx[n]u[n]) + dx[n]$$

Equivalentemente, multiplicando as equações dinâmica e de saída dadas em (3) por $u[n]$ e aplicando a transformada Z, tem-se

$$V(z) = (z\mathbf{I} - A)^{-1} zv_0 + (z\mathbf{I} - A)^{-1} bX(z)$$

$$Y(z) = c(z\mathbf{I} - A)^{-1} zv_0 + \big(c(z\mathbf{I} - A)^{-1} b + d\big) X(z)$$

Note que as parcelas devido à entrada nula e devido às condições iniciais nulas vêem-se claramente.

Solução da equação não homogênea III

Se a entrada $x[n]$ é solução do sistema homogêneo

$$\bar{v}[n+1] = \bar{A}\bar{v}[n] \quad , \quad \bar{v}[0] = \bar{v}_0 \quad , \quad x[n] = \bar{c}\bar{v}[n]$$

a solução $v[n]$ do sistema original pode ser obtida a partir do sistema aumentado

$$\begin{bmatrix} v[n+1] \\ \bar{v}[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b\bar{c} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v[n] \\ \bar{v}[n] \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} v[0] \\ \bar{v}[0] \end{bmatrix} \quad , \quad y = \begin{bmatrix} c & d\bar{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v[n] \\ \bar{v}[n] \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.12

Considere o sistema

$$v[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n] \quad , \quad v[0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad y[n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v[n] \quad , \quad x[n] = 2^n$$

Os autovalores de A são 1 e -1, e

$$A^n = \rho_0(n)\mathbf{I} + \rho_1(n)A$$

sendo ρ_0 e ρ_1 dados por

$$1 = \rho_0 + \rho_1 \quad , \quad (-1)^n = \rho_0 - \rho_1 \quad \Rightarrow \quad \rho_0 = \frac{1+(-1)^n}{2}, \rho_1 = \frac{1-(-1)^n}{2}$$

Assim, A^n e a resposta à entrada nula são dados respectivamente por

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+(-1)^n & 1-(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad y_{\text{en}}[n] = cA^n v_0 = \frac{1-(-1)^n}{2}$$

Exemplo 1.12 (cont.)

A parcela relativa às condições iniciais nulas é dada por

$$
\begin{aligned}
y_{\text{cin}}[n] = c(A^{n-1}u[n-1]) * (bx[n]u[n]) &= \Big(\frac{1}{2}(1-(-1)^{n-1})u[n-1]\Big) * (2^n u[n]) \\
&= \frac{1}{2}\big((1+(-1)^n)u[n-1]\big) * (2^n u[n])
\end{aligned}
$$

Computando as convoluções, tem-se

$$
\begin{aligned}
y_{\text{cin}}[n] &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+(-1)^k)u[k-1]2^{n-k}u[n-k] = 2^{n-1}u[n-1]\sum_{k=1}^{n}(1+(-1)^k)2^{-k} \\
&= 2^{n-1}u[n-1]\Big(\sum_{k=1}^{n}(1/2)^k + \sum_{k=1}^{n}(-1/2)^k\Big) = 2^{n-1}\Big(1-2^{-n}+\frac{-1+(-2)^{-n}}{3}\Big)u[n-1] \\
&= \Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}2^n+\frac{1}{6}(-1)^n\Big)u[n-1] = \Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}2^n+\frac{1}{6}(-1)^n\Big)u[n]
\end{aligned}
$$

e, portanto, para $n \geq 0$

$$
y[n] = \Big(\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}(-1)^n-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}2^n+\frac{1}{6}(-1)^n\Big)u[n] = \Big(\frac{1}{3}2^n-\frac{1}{3}(-1)^n\Big)u[n]
$$

Exemplo 1.12 (cont.)

Igual resultado poderia ser obtido pela transformada Z, obtendo-se $Y(z)$ e expandindo em frações parciais

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{(z-1)(z+1)} + \frac{z}{(z-1)(z+1)(z-2)} \\ &= \frac{0.5z}{(z-1)} + \frac{-0.5z}{z+1} + \frac{-0.5z}{z-1} + \frac{1}{6}\left(\frac{z}{z+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z-2}\right) \end{aligned}$$

Exemplo 1.13

Considere novamente o sistema

$$v[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n] \ , \ v[0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ y[n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v[n] \ , \ x[n] = 2^n$$

Note que a entrada $x[n] = 2^n$ pode ser obtida como solução do sistema

$$\bar{v}[n+1] = 2\bar{v}[n] \ , \ \bar{v}[0] = 1 \ , \ y[n] = \bar{v}[n]$$

O sistema aumentado dado por

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ , \ \tilde{v}[0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ \tilde{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.13 (cont.)

produz como solução (utilizando a forma de Jordan, i.e. $AQ = Q\hat{A}$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}^n &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (-1)^n + 1 & -(-1)^n + 1 & (1/3)(-1)^n - 1 + (2/3)2^n \\ -(-1)^n + 1 & (-1)^n + 1 & -(1/3)(-1)^n - 1 + (4/3)2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$y[n] = \tilde{c}\tilde{A}^n \tilde{v}[0] = \frac{1}{3}2^n + \frac{-1}{3}(-1)^n$$

Definição 3 (Observabilidade)

O sistema dinâmico linear discreto invariante no tempo, descrito por

$$v[n+1] = Av[n] \quad , \quad v \in \mathbb{R}^m \qquad , \qquad y[n] = cv[n] \in \mathbb{R}$$

é observável (ou, equivalentemente, o par (A,c) é observável) se existir $k > 0$ inteiro tal que o conhecimento da saída $y[n]$ para todo $n \in [0,k]$ é suficiente para determinar a condição inicial $v[0]$.

As propriedades das matrizes de observabilidade também aplicam-se a sistemas discretos, isto é, o par (A,c) é observável se e somente se

$$\det(\text{Obsv}(A,c)) = \det \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \neq 0$$

ou se e somente se a matriz

$$\begin{bmatrix} A - \lambda \mathbf{I} \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+1)\times m}$$

tiver *rank* m.

Definição 4 (Controlabilidade)

O sistema dinâmico linear discreto invariante no tempo, descrito por

$$v[n+1] = Av[n] + bx[n] \quad , \quad v \in \mathbb{R}^m \qquad , \qquad x[n] \in \mathbb{R}$$

é controlável (ou, equivalentemente, o par (A, b) é controlável) se para qualquer estado inicial $v[0]$ e um estado $v[k]$ final arbitrário, existir uma entrada $x[n]$, $n \in [0, k]$, $k > 1$ finito que leve o sistema de $v[0]$ a $v[k]$.

As Propriedades de controlabilidade também aplicam-se a sistemas discretos, isto é, o par (A, b) é controlável se e somente se

$$\det(\text{Ctrb}(A, b)) = \det \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots A^{n-1}b \end{bmatrix} \neq 0$$

ou se e somente se a matriz

$$\begin{bmatrix} A - \lambda \mathbf{I} & b \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times (m+1)}$$

tiver *rank* m.

No caso contínuo, como $\exp(At)$ é não singular para todo t, a controlabilidade de um estado arbitrário inicial a um estado final, de um estado inicial à origem ou da origem a um estado final arbitrário é a mesma coisa. No caso discreto, pode haver distinção entre controlabilidade para a origem e controlabilidade a partir da origem ou acessibilidade (chamada em inglês de *reachability*) se a matriz A for singular.

Exemplo 1.14

O sistema

$$v[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x[n]$$

é não controlável (matriz de controlabilidade igual a zero), não satisfaz a definição de controlabilidade nem pode atingir um ponto qualquer a partir da origem. No entanto, para qualquer condição inicial e para qualquer entrada $x[n]$,

$$v[3] = A^3 v[0] = 0$$

implicando que o sistema é controlável para a origem.

Exemplo 1.15

O sistema

$$v[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} v[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

é não controlável (matriz de controlabilidade tem *rank* igual a 1), e portanto não pode atingir um ponto qualquer a partir da origem. Entretanto, para qualquer condição inicial

$$v[0] = \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix}$$

a entrada $x[0] = -2v_{10} - v_{20}$ transfere o sistema para a origem, indicando que o sistema é controlável para a origem.

Propriedade 2

Para sistemas controláveis, existe $\beta \in \mathbb{R}^m$ *tal que a entrada*

$$x[n] = b'(A')^{-n}\beta \quad , \quad n \in [0,k] \ , \ k > 1 \tag{4}$$

leva o sistema da condição inicial $v[0] = 0$ *para* $v[k]$ *arbitrário.*

Exemplo 1.16

Considere o sistema

$$v[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v[n] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

controlável, pois

$$\det(\mathrm{Ctrb}(A,b)) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \neq 0$$

A solução $v[n]$ para condições iniciais nulas é dada por

$$v[n] = \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} b x[k]$$

Exemplo 1.16 (cont.)

ou, multiplicando por $u[n]$ e aplicando a transformada Z,

$$V(z) = (z\mathbf{I} - A)^{-1} bX(z)$$

A transformada Z de $x[n]u[n]$ é dada por

$$\mathscr{Z}\{b'\left((A')^{-1}\right)^n \beta u[n]\} = b'\left(z\mathbf{I} - (A')^{-1}\right)^{-1} z\beta$$

e, portanto,

$$V(z) = (z\mathbf{I} - A)^{-1} bb'\left(z\mathbf{I} - (A')^{-1}\right)^{-1} z\beta$$

Substituindo os valores, tem-se

$$V(z) = M(z)\beta = \frac{z}{(z^2+3z+2)(2z^2+3z+1)} \begin{bmatrix} (z+4)(2z-1) & (z+4)(2z+5) \\ (z-2)(2z-1) & (z-2)(2z+5) \end{bmatrix} \beta$$

Note que $\det(M(z)) = 0$ para todo z, pois $\det(bb') = 0$.

Exemplo 1.16 (cont.)

Entretanto, a transformada inversa Z de $M(z)$, dada por

$$M(n) = \begin{bmatrix} \frac{10}{3}(-2)^n + 6(-1)^n - 9(-1)^n n - \frac{28}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & -\frac{2}{3}(-2)^n - 18(-1)^n + 9(-1)^n n + \frac{56}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ -\frac{20}{3}(-2)^n + 9(-1)^n n + \frac{20}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{4}{3}(-2)^n + 12(-1)^n - 9(-1)^n n - \frac{40}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$$

é não singular para todo $n > 1$. A entrada $x[n]$, $n \in [0,1]$ que leva o sistema da origem para $v[2] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}'$ é dada por (4) e, portanto,

$$\beta = M(2)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.16 (cont.)

$$x[n] = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}^{-n}\begin{bmatrix}1\\ 5\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-2)^{-n} & 0\\ 0 & (-3)^{-n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 5\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\left(18(-2)^{(-n)} - 12(-1)^{(-n)}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}(-1)^n$$

De fato,

$$v[1] = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}x[0] = \frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \quad , \quad v[2] = Av[1] + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}x[1] = \frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\ -5\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix}$$

Estabilidade

Estabilidade

Assim como no caso contínuo, a estabilidade de sistemas discretos no tempo pode ser caracterizada em termos da relação entrada-saída (BIBO estabilidade) ou em termos das variáveis de estado (estabilidade dos pontos de equilíbrio).

Estabilidade entrada-saída

Propriedade 3 (Função de transferência BIBO estável)

Se um sistema linear invariante no tempo descrito por uma função de transferência $H(z)$ for BIBO estável, então $z = \exp(j\omega)$ pertence ao domínio Ω_h, pois

$$|H(z = \exp(j\omega))| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\exp(-j\omega k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < +\infty$$

e isso mostra que um sistema é BIBO estável se e somente se a resposta ao impulso for absolutamente somável.

Propriedade 4 (Função de transferência racional causal BIBO estável)

Um sistema linear invariante no tempo causal descrito por uma função de transferência racional

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \; , \; \Omega_h = \{z \in \mathbb{C} \; , \; |z| > |\sigma|\} \; , \; \sigma = \max_k |\lambda_k|$$

é BIBO estável se e somente se todos os polos λ_k (isto é, raízes de $D(z) = 0$) tiverem valor absoluto menor do que um.
Prova: autovalores com módulo menor do que um garantem que a resposta causal ao impulso

$$h[n] = \sum_{k=1}^{m} a_k g_k[n] \quad , \quad g_k[n] = n^{r_k} \lambda_k^n u[n] \; , \; 0 \leq r_k \leq m$$

é absolutamente somável.
Observe que foi suposto que $H(z)$ é estritamente próprio. Se $H(z)$ for próprio, ocorre um impulso na resposta ao impulso, o que não invalida a demonstração.

Polinômio Schur

Definição 5 (Polinômio Schur)

Um polinômio $D(p)$ que possui todas as raízes com valor absoluto menor do que um é chamado de polinômio Schur.

Assim como no caso de polinômios Hurwitz, isto é, polinômios cujas raízes têm parte real negativa, associados a sistemas contínuos no tempo, existem critérios numéricos para determinar se todas as raízes de um polinômio estão no interior do círculo unitário do plano complexo sem computar explicitamente as raízes.

Propriedade 5 (Critério de Jury)

Considere um polinômio $D_m(z)$ de grau m dado por

$$\alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad , \quad \alpha_m > 0$$

Construa a tabela (versão simplificada do critério de Jury) com os coeficientes do polinômio na primeira linha (da potência maior para a menor), com os coeficientes β_k dados por

$$\beta_{m-1} = \alpha_m - k_0\alpha_0, \quad \beta_{m-2} = \alpha_{m-1} - k_0\alpha_1, \quad \ldots, \quad \beta_0 = \alpha_1 - k_0\alpha_{m-1} \quad , \quad k_0 = \frac{\alpha_0}{\alpha_m}$$

na segunda linha, com os coeficientes γ_k dados por

$$\gamma_{m-2} = \beta_{m-1} - k_1\beta_0, \quad \gamma_{m-3} = \beta_{m-2} - k_1\beta_1, \quad \ldots, \quad \gamma_0 = \beta_1 - k_1\beta_{m-2} \quad , \quad k_1 = \frac{\beta_0}{\beta_{m-1}}$$

e assim por diante.

Propriedade 5 (Critério de Jury (cont.))

$$
\begin{array}{ccccccc}
\alpha_m & \alpha_{m-1} & \alpha_{m-2} & \cdots & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \\
\hline
\beta_{m-1} & \beta_{m-2} & \cdots & \cdots & \beta_1 & \beta_0 & \\
\hline
\gamma_{m-2} & \gamma_{m-3} & \cdots & \cdots & \gamma_0 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & & & & \\
\zeta_1 & \zeta_0 & & & & & \\
\hline
\omega_0 & & & & & &
\end{array}
$$

O polinômio $D_m(z)$ é Schur se e somente se todos os coeficientes da primeira coluna da tabela forem positivos. Além disso, o número de elementos com coeficientes negativos na primeira coluna indica o número de raízes fora do círculo unitário.

Casos de singularidade no cômputo da tabela devem ser tratados adequadamente.

O elemento associado ao grau zero de um polinômio é igual ao produto das raízes, implicando que uma condição necessária para a estabilidade é que $|\alpha_0| < \alpha_m$.

Exemplo 1.17

A tabela de Jury associada ao polinômio

$$D_2(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$$

é dada por

$$\begin{array}{ccc} 1 & \alpha_1 & \alpha_0 \\ \hline \beta_1 & \beta_0 & \\ \gamma_0 & & \end{array}$$

com

$$k_0 = \alpha_0 \ , \ \beta_1 = 1 - \alpha_0^2 \ , \ \beta_0 = \alpha_1 - \alpha_0 \alpha_1 \ , \ k_1 = \frac{(1-\alpha_0)\alpha_1}{1-\alpha_0^2}$$

$$\gamma_0 = \beta_1 - k_1 \beta_0 = 1 - \alpha_0^2 - \frac{(1-\alpha_0)\alpha_1}{1-\alpha_0^2}(\alpha_1 - \alpha_0\alpha_1) = \frac{(1-\alpha_0^2)^2 - ((1-\alpha_0)\alpha_1)^2}{1-\alpha_0^2}$$

As condições necessárias e suficientes para que as raízes estejam no interior do círculo unitário são dadas por

$$\beta_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad |\alpha_0| < 1 \quad , \quad \gamma_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad |1 - \alpha_0^2| > |(1-\alpha_0)\alpha_1|$$

Exemplo 1.18

Considere o polinômio

$$D(z) = z^4 - 0.7z^3 - 0.075z^2 + 0.05z + 0.05$$

e a tabela de Jury associada

$$k_0 = 0.05, \quad \beta_3 = 1 - (0.05)(0.05) = 0.9975, \quad \beta_2 = -0.7 - (0.05)(0.05) = -0.7025,$$
$$\beta_1 = -0.075 - (0.05)(-0.075) = -0.07125, \quad \beta_0 = 0.05 - (0.05)(-0.7) = 0.085$$

$$k_1 \approx 0.0852, \quad \gamma_2 = 0.9975 - (0.0852)(0.085) \approx 0.9903,$$
$$\gamma_1 = -0.7025 - (0.0852)(-0.07125) \approx -0.6964,$$
$$\gamma_0 = -0.07125 - (0.0852)(0.7025) \approx -0.0114$$

$$k_2 \approx -0.0115, \quad \delta_1 = 0.9903 - (-0.0115)(-0.0114) \approx 0.9901,$$
$$\delta_0 = -0.6964 - (-0.0115)(-0.6964) \approx -0.7044$$

$$k_3 \approx -0.7115, \quad \varepsilon_0 = 0.9901 - (-0.7115)(-0.7044) \approx 0.4889$$

Exemplo 1.19

1	-0.7	-0.075	0.05	0.05
0.9975	-0.7025	-0.07125	0.085	
0.9903	-0.6964	-0.0114		
0.9901	-0.7044			
0.4889				

Como os elementos da primeira coluna são todos positivos, pode-se concluir que todas as raízes estão no interior do círculo unitário. De fato, as raízes são $-0.25 \pm j0.25$ e $0.6 \pm j0.2$.

Exemplo 1.20

Considere o polinômio

$$D(z) = z^4 - 1.2z^3 + 0.07z^2 + 0.3z - 0.08$$

e a tabela de Jury associada

1	-1.2	0.07	0.3	-0.08	$k_0 = -0.08$
0.9936	-1.1760	0.0756	0.2040		$k_1 = 0.2053$
0.9517	-1.1915	0.3170			$k_2 = 0.3331$
0.8461	-0.7946				$k_3 = -0.9391$
0.0999					

Como os elementos da primeira coluna são todos positivos, pode-se concluir que todas as raízes estão no interior do círculo unitário. De fato, as raízes são -0.5, 0.8, 0.5 e 0.4.

Exemplo 1.21

Considere o polinômio

$$D(z) = z^3 - 1.3z^2 - 0.08z + 0.24$$

e a tabela de Jury associada

1	-1.3	-0.08	0.24	$k_0 = 0.24$
0.9424	-1.2808	0.2320		$k_1 = 0.2462$
0.8853	-0.9655			$k_2 = -1.0906$
-0.1677				

A presença de um sinal negativo na primeira coluna indica que uma das raízes está fora do círculo unitário. De fato, as raízes são 1.2, 0.5 e -0.4.

Transformação bilinear

A transformação bilinear definida por

$$z = \frac{s+1}{s-1}$$

mapeia o círculo unitário $|z| = 1$ no semi-plano esquerdo do plano complexo $\text{Re}(s) < 0$. Assim, a estabilidade Schur de um polinômio pode ser testada com os critérios de estabilidade relacionados com polinômios Hurwitz, como por exemplo a tabela de Routh.

Exemplo 1.22

Considere o polinômio

$$D(z) = z^4 - 1.2z^3 + 0.07z^2 + 0.3z - 0.08$$

que, com a transformação bilinear, pode ser escrito em termos de s como

$$\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^4 - 1.2\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^3 + 0.07\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 + 0.3\left(\frac{s+1}{s-1}\right) - 0.08$$

Multiplicando a equação por $(s-1)^4$ e simplificando, tem-se

$$D(s) = 0.09s^4 + 1.32s^3 + 5.38s^2 + 7.32s + 1.89$$

cuja tabela de Routh é dada por

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 0.09 & 5.38 & 1.89 \\ s^3 & 1.32 & 7.32 & \\ s^2 & 4.8809 & 1.89 & \\ s & 6.8089 & & \\ 1 & 1.89 & & \end{array}$$

Como todos os elementos são positivos, $D(s)$ é Hurwitz $\Rightarrow$ $D(z)$ é Schur.

Estabilidade do estado

Assim como no caso contínuo, o comportamento das trajetórias do vetor de estados para entrada constante e condições iniciais próximas ao ponto de equilíbrio define a estabilidade local (estável, assintoticamente estável ou instável).

Propriedade 6 (Estabilidade assintótica de sistemas lineares)

O sistema linear autônomo

$$v[n+1] = Av[n]$$

é assintoticamente estável se e somente se o valor absoluto de todos os autovalores de A for menor do que um, pois a solução do sistema linear é dada por

$$v[n] = A^n v[0]$$

que é composta pelos modos próprios associados às raízes de $\Delta(\lambda) = 0$, ou seja, associados aos autovalores da matriz A.

Se nenhum autovalor for nulo, a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema e, portanto, se a origem for assintoticamente estável, o sistema é globalmente assintoticamente estável.

As considerações sobre polos e zeros são válidas também para o caso discreto, ou seja, a função de transferência é dada por

$$H(z) = c(z\mathbf{I} - A)^{-1}b + d$$

e, portanto, todo polo de $H(z)$ é autovalor de A, mas nem todo autovalor é necessariamente polo (pode haver cancelamentos devidos à não controlabilidade ou à não observabilidade). Assim, a estabilidade assintótica implica na BIBO estabilidade, e a BIBO estabilidade só implica na estabilidade assintótica se o sistema for controlável e observável.

Função de Lyapunov

Propriedade 7 (Função de Lyapunov)

Considere o sistema

$$v[n+1] = f(v[n])$$

O ponto de equilíbrio $\bar{v} = 0$ *é assintoticamente estável se existir um domínio* Ω *contendo a origem e uma função escalar* $\psi(v)$ *contínua tal que*

$$\psi(0) = 0 \ \ , \ \ \psi(v) > 0 \ \forall v \in \Omega - \{0\} \ \ e \ \ \Delta\psi(v) = \psi(v[n+1]) - \psi(v[n]) < 0 \ \forall v \in \Omega - \{0\}$$

Assim como no caso contínuo, a condição acima é apenas suficiente para a estabilidade assintótica, e depende da construção da função $\psi(v)$, que na maioria dos casos é dada por

$$\psi(v) = v'Pv$$

com $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ uma matriz simétrica definida positiva a determinar. Note que, com essa escolha de $\psi(v)$, a primeira diferença é dada por

$$\Delta\psi(v) = f(v[n])'Pf(v[n]) - v[n]'Pv[n]$$

e o teste da estabilidade assintótica consiste na análise do sinal de $\Delta\psi(v)$.

Desigualdade de Lyapunov

Propriedade 8 (Desigualdade de Lyapunov)

O sistema linear autônomo

$$v[n+1] = Av[n]$$

é assintoticamente estável se e somente se existir $P = P' > 0$ *tal que*

$$A'PA - P < 0 \qquad \textit{(definida negativa)}$$

Prova: a suficiência é consequência da escolha da função de Lyapunov

$$\psi(v) = v'Pv \quad \Rightarrow \quad \Delta\psi(v) = v[n+1]'Pv[n+1] - v[n]'Pv[n] = v[n]'(A'PA - P)v[n]$$

e, portanto,

$$\psi(v) > 0 \;\; e \;\; \Delta\psi(v) < 0 \, , \; v \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P > 0 \, , \; A'PA - P < 0$$

Note que $A'PA - P$ *é uma matriz simétrica.*

A determinação de uma matriz simétrica definida positiva P que satisfaz a desigualdade acima pode ser feita pela solução da equação de Lyapunov

$$A'PA - P = -Q$$

com $Q = Q' > 0$ arbitrária, por exemplo, igual à matriz identidade.

Teorema 1 (Lyapunov)

Para qualquer matriz $Q = Q' > 0$, a solução da equação de Lyapunov

$$A'PA - P = -Q$$

é única, simétrica e definida positiva se e somente se todos os autovalores da matriz A tiverem valor absoluto menor do que um (isto é, se A for assintoticamente estável).

Teorema 1 (Lyapunov (cont.))

Prova: se os autovalores de A (iguais aos de A') são, em módulo, menores do que um, P é solução única da equação pois não existem dois autovalores cujo produto seja igual a um.
Além disso, para $Q = Q' > 0$ qualquer, a solução (como $|\lambda_i(A)| < 1$, $i = 1, \ldots, m$, a soma converge) é dada por

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} (A')^k Q A^k$$

Substituindo na equação, tem-se

$$A' \sum_{k=0}^{+\infty} (A')^k Q A^k A - \sum_{k=0}^{+\infty} (A')^k Q A^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (A')^k Q A^k - \Big(Q + \sum_{k=1}^{+\infty} (A')^k Q A^k \Big) = -Q$$

o que confirma que P acima é solução. Como Q é simétrica e definida positiva, P também o é, o que completa a necessidade. Para mostrar a suficiência, considere λ um autovalor de A com o autovetor associado v, isto é, $Av = \lambda v$. Então,

$$(v^*)'Qv = (v^*)'Pv - (v^*)'A'PAv = (v^*)'Pv - \lambda^*(v^*)'P\lambda v = (1 - |\lambda|^2)(v^*)'Pv$$

e, como $(v^*)'Qv$ e $(v^*)'Pv$ são reais e positivos, tem-se $|\lambda|^2 < 1$.

Exemplo 1.23

Considere o sistema

$$v[n+1] = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v[n]$$

Pela solução da equação de Lyapunov discreta,

$$A'PA - P = -\mathbf{I}$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2p_2 + p_3 & -0.5p_1 - 1.5p_2 \\ -0.5p_1 - 1.5p_2 & 0.25p_1 - p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 24 & -8 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}$$

Como P é definida positiva (menores principais líderes positivos), o sistema é assintoticamente estável.

Exemplo 1.24

Considere o sistema

$$v[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} v[n]$$

Pela solução da equação de Lyapunov discreta,

$$A'PA - P = -\mathbf{I}$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 25p_3 - p_1 & -6p_2 + 30p_3 \\ -6p_2 + 30p_3 & p_1 - 12p_2 + 35p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 25 \\ 0 & -6 & 30 \\ 1 & -12 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como o determinante da matriz acima é nulo, a solução p_1, p_2 e p_3 não existe ou não é única, indicando que o sistema não é assintoticamente estável. De fato, as equações acima não possuem solução, pois o vetor $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}'$ não está no *range* da matriz.

Propriedade

Propriedade 9

O sistema linear autônomo

$$v[n+1] = Av[n]$$

é estável se e somente se o valor absoluto de todos os autovalores de A for menor ou igual a um, e os blocos de Jordan associados aos autovalores com módulo igual a um forem de ordem igual a um. Note que, nesse caso, a sequência $v[n]$ é sempre limitada para qualquer condição inicial. Alguns livros utilizam os termos "estabilidade no sentido de Lyapunov" ou "sistema marginalmente estável".

Caso contrário, isto é, se houver algum autovalor com valor absoluto maior do que um ou blocos de Jordan de ordem maior que um associados aos autovalores de módulo igual a um, o sistema é instável.

Discretização I

Modelos discretos que descrevem de maneira aproximada sistemas dinâmicos contínuos no tempo podem ser obtidos de diversas maneiras em função do tempo de amostragem T (por exemplo, veja o comando `c2d` do Matlab).

Considere o sistema linear contínuo no tempo dado por

$$\dot{v}(t) = Av(t) + bx(t)$$
$$y(t) = cv(t) + dx(t)$$

Levando em conta que

$$\dot{v}(t) = \lim_{T \to 0} \frac{v(t+T) - v(t)}{T}$$

pode-se aproximar o modelo acima por

$$v(t+T) = v(t) + Av(t)T + bx(t)T$$

e, computando $v(t)$ e $x(t)$ apenas nos instantes $t = nT$, $n = 0, 1, \ldots$ tem-se

$$v((n+1)T) = (\mathbf{I} + TA)v(nT) + Tbx(nT)$$
$$y(nT) = cv(nT) + dx(nT)$$

Discretização II

A discretização acima (aproximação de primeira ordem de Euler), embora melhore quanto menor for o valor de T, pode ser bastante imprecisa.

Se a entrada $x(t)$ é obtida de um sinal digital que passa por um conversor digital-analógico, do tipo segurador de ordem zero (em inglês, *zero order hold*), tem-se

$$x(t) = x(nT) = x[n] \quad , \quad \text{para} \quad nT \leq t < (n+1)T \quad , \quad n = 0, 1, \ldots$$

Para essa entrada que muda apenas com os instantes discretos de tempo n, a solução do sistema dinâmico contínuo é dada por

$$v(t) = \exp(At)v(0) + \int_0^t \exp(A(t-\beta))bx(\beta)d\beta$$

que, computada em $t = (n+1)T$ fornece

$$\begin{aligned} v((n+1)T) &= \exp(A(n+1)T)v(0) + \int_0^{(n+1)T} \exp(A(n+1)T-\beta)bx(\beta)d\beta \\ &= \exp(AT)\Big(\exp(AnT)v(0) + \int_0^{nT} \exp(A(nT-\beta))bx(\beta)d\beta\Big) \\ &\quad + \int_{nT}^{(n+1)T} \exp(A(nT+T-\beta))bx(\beta)d\beta \end{aligned}$$

Discretização III

Portanto, como $x(\beta) = x(nT)$ é constante, tem-se

$$v((n+1)T) = \exp(AT)v(nT) + \left(\int_0^T \exp(A\beta)d\beta\right)bx(nT)$$

e o modelo discreto é dado por

$$\begin{aligned} v[n+1] &= A_d v[n] + b_d x[n] \\ y[n] &= c_d v[n] + dx[n] \end{aligned}$$

com

$$A_d = \exp(AT)\ ,\ b_d = \left(\int_0^T \exp(A\beta)d\beta\right)b\ ,\ c_d = c\ ,\ d_d = d$$

Note que não foi feita nenhuma aproximação no modelo e, portanto, a equação discreta fornece a solução exata do sistema contínuo em $t = nT$ se a entrada for mantida constante entre dois instantes.

Note ainda que

$$A^{-1}(A_d - \mathbf{I})b\int_0^T \exp(A\beta)d\beta = \int_0^T (\mathbf{I} + A\beta + A^2\frac{\beta^2}{2} + \cdots)d\beta = T\mathbf{I} + \frac{T^2}{2!}A + \frac{T^3}{3!}A^2 + \cdots$$

Discretização IV

e, se A é não singular, tem-se

$$A^{-1}\Big(TA + \frac{T^2}{2!}A^2 + \frac{T^3}{3!}A^3 + \cdots + \mathbf{I} - \mathbf{I}\Big) = A^{-1}\big(\exp(AT) - \mathbf{I}\big)$$

e nesse caso

$$b_d = A^{-1}\big(\exp(AT) - \mathbf{I}\big)b = A^{-1}(A_d - \mathbf{I})b$$

Exemplo 1.25

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} v$$

cuja função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+2}$$

O sistema discretizado com $T = 1$ é dado por

$$A_d = \exp(A) = \begin{bmatrix} 0.5083 & 0.3096 \\ -0.6191 & -0.1108 \end{bmatrix}, \ b_d = A^{-1}(A_d - \mathbf{I})b = \begin{bmatrix} 1.0471 \\ -0.1821 \end{bmatrix}, \ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} v$$

A Figura 3 mostra as respostas ao degrau contínua $y_u(t)$ e discreta $y_u[n]$, tendendo ao valor $H(0) = 0.5$. Note que os pontos da sequência discreta $y[n]$ coincidem com $y_u(t)$ nos instantes $t = kT$.

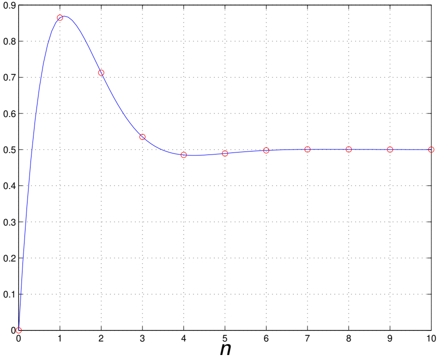

Figura: Respostas ao degrau, contínua $y(t)$ (—) e discretizada $y[n]$ (○).