Livro (e-book): Linearidade em Sinais e Sistemas, Ivanil S. Bonatti, Amauri Lopes, Pedro L. D. Peres, Cristiano M. Agulhari,

Ed. Blucher, SP, 2015, 1ed., ISBN: 9788521208921.

Prof. Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Sinais Contínuos e Convolução

Definição 1 (Sinais Contínuos)

Um sinal contínuo, denotado $x(t)$, é uma função (real ou complexa) cujo domínio é o conjunto dos reais $\mathbb{R}$.

Definição 2 (Degrau Unitário)

$$u_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq 0 \\ (1/\Delta)t & , \quad 0 < t \leq \Delta \\ 1 & , \quad t > \Delta \end{cases} \Rightarrow u(t) = \lim_{\Delta \to 0^+} u_\Delta(t) = \begin{cases} u(t) = 0, & t \leq 0 \\ u(t) = 1, & t > 0 \end{cases}$$

Note que

$$u(0) = 0 \quad ; \quad u(0^+) = \lim_{t \to 0^+} u(t) = 1$$

Definição 3 (Impulso Unitário)

$$\delta_\Delta(t) = \frac{d}{dt}u_\Delta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1/\Delta, & 0 < t < \Delta \\ 0, & t > \Delta \end{cases} \Rightarrow \delta(t) = \lim_{\Delta \to 0^+} \delta_\Delta(t) \Rightarrow \delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$$

Como consequência, tem-se

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\beta) d\beta$$

Note que o impulso ocorre em 0^+ *e*

$$\delta(0) = 0$$

Impulso Unitário

Os sinais $u_\Delta(t)$ e $\delta_\Delta(t)$ são mostrados na figura.

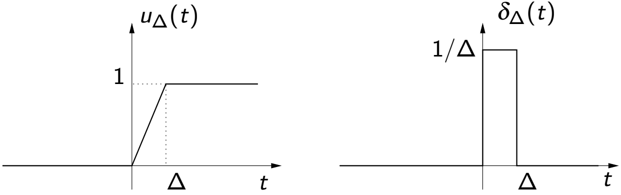

Figura: Sinais $u_\Delta(t)$ e $\delta_\Delta(t)$.

Propriedade 1 (Integral com Impulso)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt \ = \ f(0) \ \ , \ \ \forall \ \ f(t) \ \textit{contínua em} \ t = 0$$

Prova: $I \ = \ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt \ = \ \lim_{\Delta\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_\Delta(t)dt \ = \ \lim_{\Delta\to 0^+} \int_0^\Delta \frac{1}{\Delta} f(t)dt$

Pelo teorema do valor médio, tem-se

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a) \ \ , \ \ c \in (a,b), \ \ \text{e, portanto,}$$

$$I = \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{1}{\Delta} f(y)(\Delta - 0) \quad , \quad y \in (0,\Delta) \Rightarrow I = \lim_{\substack{\Delta \to 0^+ \\ y \in (0,\Delta)}} f(y) = f(0)$$

A função impulso não pode ser calculada pontualmente. Apenas integrais envolvendo $\delta(t)$ podem ser avaliadas. Como consequência $f(t)\delta(t) \ = \ f(0)\delta(t)$ pois ambas têm o mesmo valor da integral.

Propriedade 2 (Integral com Impulso Deslocado)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \quad , \quad f(t) \text{ contínua em } t = a$$

Propriedade 3 (Integral com Impulso Escalonado)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(at)dt = \frac{1}{|a|}f(0) \quad , \quad a \neq 0,\ a \in \mathbb{R} \text{ e } f(t) \text{ contínua em } t = 0$$

Note que o impulso pode ser considerado uma "função" par, ou seja, $\delta(-t) = \delta(t)$.

Integral com Impulso

Exemplo 1.1

Usando as propriedades do impulso, tem-se:

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(2t^2+3)\delta(t)dt = 3$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(2t^2+3)\delta(-t)dt = 3$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+3)\delta(t+1)dt = 1$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(2t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\beta)d\beta = \frac{1}{2}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(2t^2+3)\delta(2t)dt = \frac{3}{2}$

Exemplo 1.2

A função $u(t)$ (degrau unitário) pode ser usada na definição de outras funções.

A função *gate* $G_T(t)$, $T > 0$, pode ser descrita como

$$G_T(t) = u(t+T/2) - u(t-T/2) = \begin{cases} +1\ , & |\,t\,| < \dfrac{T}{2} \\ 0\ , & |\,t\,| > \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

Note que $u(t+T/2)$ corresponde a deslocar para a esquerda a função $u(t)$ de $T/2$.

Para esboçar $x(at+b)$, primeiro desloque $x(t)$ para a direita se $b<0$ (ou para a esquerda, se $b>0$) de acordo com o valor de b, e depois faça o escalonamento no tempo de acordo com o valor de a. Se $|a|>1$, trata-se de compressão, e se $|a|<1$, de expansão. Ocorre uma reversão se $a<0$.

Assim:

- $x(t-1)$ é um deslocamento de 1 unidade para a direita;
- $x(t+1)$ é um deslocamento de 1 unidade para a esquerda,
- $x(-t)$ é uma reversão no tempo;
- $x(2t)$ é uma contração no tempo;
- $x(t/2)$ é uma expansão no tempo;
- Note que

$$y(t) = x(t+b)\ ,\ w(t) = y(at) \quad \Rightarrow \quad w(t) = x(at+b)$$

mas

$$y(t) = x(at)\ ,\ w(t) = y(t+b) \quad \Rightarrow \quad w(t) = x(at+ab)$$

Exemplo 1.3

Os esboços do sinal

$$x(t) = (t+1)\big(u(t+1) - u(t)\big) + \big(u(t) - u(t-1)\big)$$

e de $\dot{x}(t) = \dfrac{d}{dt}x(t)$ são mostrados na figura.

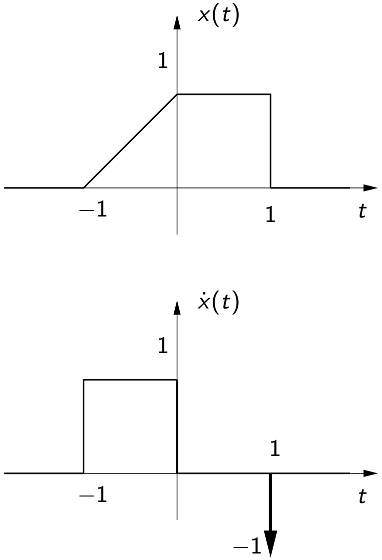

Figura: Sinais $x(t)$ e derivada $\dot{x}(t)$.

A expressão de $\dot{x}(t)$ é

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = u(t+1) - u(t) + (t+1)\big(\delta(t+1) - \delta(t)\big) + \delta(t) - \delta(t-1) \\ = u(t+1) - u(t) - \delta(t-1)\end{aligned}$$

Para esboçar $y(t) = x(1-t)$, é conveniente primeiramente esboçar $f(t) = x(t+1)$ (deslocamento para a esquerda) e depois esboçar $y(t) = f(-t)$ (reversão), conforme ilustrado.

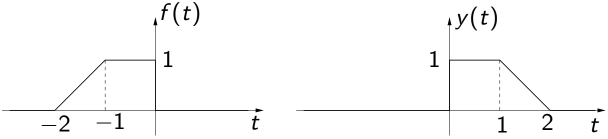

Figura: Sinais $f(t) = x(t+1)$ e $y(t) = x(1-t)$.

Função Par e Função Ímpar

Definição 4 (Função Par e Função Ímpar)

$$x(t) = x(-t) \quad \textit{é par} \quad , \quad x(t) = -x(-t) \quad \textit{é ímpar}$$

Exemplo 1.4

As funções $\cos(t)$, $\operatorname{sen}^2(t)$ são pares e as funções $\operatorname{sen}(t)$, $\cos(t)\operatorname{sen}(t)$ são ímpares. Note que qualquer função $x(t)$ pode ser decomposta em parcelas $x_p(t)$ par e $x_i(t)$ ímpar, isto é

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t) \ , \qquad x_p(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big) \ , \qquad x_i(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big)$$

Definição 5 (Sistemas Contínuos)

São sistemas cujas entradas e saídas são funções escalares (sinais reais ou complexos) contínuas no tempo.

Notação: $y(t) = \mathscr{G}\{x(t)\}$, *sendo* $x(t)$ *a entrada e* $y(t)$ *a saída.*

Exemplo 1.5 (Integrador)

A relação entre uma entrada $x(t)$ e a saída

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\beta)d\beta$$

define um sistema contínuo (integrador), que pode também ser descrito pela equação diferencial

$$\dot{y}(t) = x(t)$$

Exemplo

A figura ilustra a relação entre uma entrada $x(t)$ e sua integral $y(t)$.

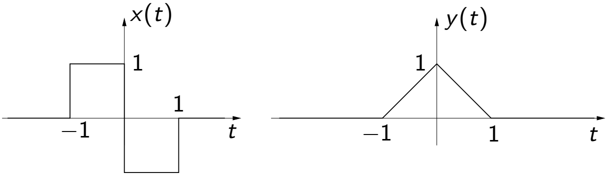

Figura: Sinal $x(t)$ e sua integral $y(t)$.

Exemplo 1.6

Denotando a m-ésima derivada de $y(t)$ por $y^{(m)}$, a equação diferencial

$$y^{(m)} + \alpha_{m-1} y^{(m-1)} + \cdots + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = \beta_\ell x^{(\ell)} + \beta_{\ell-1} x^{(\ell-1)} + \cdots + \beta_1 \dot{x} + \beta_0 x$$

descreve um sistema contínuo de ordem m.

Definindo o operador simbólico p

$$p = \frac{d}{dt} \quad , \quad p^2 = \frac{d^2}{dt^2} \quad , \quad \ldots$$

tem-se

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad , \quad D(p) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k \; ; \; N(p) = \sum_{k=0}^{\ell} \beta_k p^k$$

com $\alpha_m = 1$. Neste caso, $D(p)$ é um polinômio mônico.

Definição 6 (Sistemas Lineares)

Um sistema é linear se satisfaz o princípio da superposição, isto é,

$$\mathscr{G}\{a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\}=a_1\mathscr{G}\{x_1(t)\}+a_2\mathscr{G}\{x_2(t)\}$$

Note que $\mathscr{G}\{0\}=0$.

Exemplo 1.7

O integrador do Exemplo 1.5 e o sistema descrito pela equação diferencial do Exemplo 1.6 são sistemas lineares, pois a integral da soma é a soma das integrais e a derivada da soma é a soma das derivadas.

Exemplo 1.8

Considere um pêndulo composto por uma haste rígida sem peso, de comprimento ℓ, oscilando em um plano vertical, sujeito ao atrito de fricção no engate e sustentando na extremidade livre uma massa m. Denotando por y o ângulo com a vertical (em repouso, $y = 0$), tem-se a equação do movimento angular

$$m\ell\ddot{y} = -mg\,\mathrm{sen}(y) - mb\dot{y}$$

sendo g a aceleração da gravidade e b o coeficiente de atrito. A força longitudinal na barra é dada por $mg\cos(y)$.

Trata-se de um sistema não-linear, pois o seno da soma não é a soma dos senos.

Para pequenas variações em torno do ponto de equilíbrio $y = 0$, $\dot{y} = 0$ tem-se $\mathrm{sen}(y) \approx y$, resultando na equação diferencial linear

$$m\ell\ddot{y} = -mgy - mb\dot{y}$$

Definição 7 (Invariante no Tempo)

Um sistema é invariante no tempo se um deslocamento da entrada produzir igual deslocamento na saída, isto é,

$$y(t-a) = \mathscr{G}\{x(t-a)\}$$

para qualquer a real.

Exemplo 1.9

O integrador do Exemplo 1.5 e o sistema descrito pela equação diferencial do Exemplo 1.6 com coeficientes constantes são sistemas lineares invariantes no tempo, pois

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\beta)d\beta \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{t} x(\beta - a)d\beta = \int_{-\infty}^{t-a} x(\beta)d\beta = y(t-a)$$

e

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad \Rightarrow \quad D(p)y(t-a) = N(p)x(t-a)$$

Exemplo 1.10

O sistema

$$y(t) = \mathscr{G}\{x(t)\} = x(t^2)$$

é linear, pois

$$\mathscr{G}\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1x_1(t^2) + a_2x_2(t^2)$$

e é variante no tempo, pois

$$y_1(t) = x_1(t^2) \ , \ y_2(t) = x_2(t^2)$$

$$x_2(t) = x_1(t-a) \quad \Rightarrow \quad y_2(t) = x_1(t^2 - a) \neq y_1(t-a) = x_1\big((t-a)^2\big)$$

Definição 8 (Sistema sem Memória)

Um sistema é sem memória se a saída no instante t depende apenas do sinal de entrada no instante t.

Exemplo 1.11

O integrador do Exemplo 1.5 e o sistema do Exemplo 1.10 são sistemas com memória.

Definição 9 (Sistema Causal)

Um sistema é causal ou não antecipativo quando a saída não depende de valores futuros da entrada.

Exemplo 1.12

O sistema descrito pela relação

$$y(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(\beta) d\beta$$

é não causal, pois é preciso conhecer a entrada até o instante $t+1$ para determinar-se a saída $y(t)$.

Definição 10 (Sistema BIBO Estável)

*Um sistema é BIBO estável (*Bounded-Input Bounded-Output*) se a saída é limitada para toda entrada limitada.*

$$|x(t)| < b \quad \Rightarrow \quad |y(t)| < +\infty$$

Exemplo 1.13

$$y(t) = tx(t)$$

é um sistema linear, sem memória, causal, variante no tempo e não BIBO estável.

$$y(t) = \exp(x(t))$$

é um sistema não linear, sem memória, causal, invariante no tempo e BIBO estável.

$$y(t) = x(t)\cos(t+1)$$

é um sistema linear, sem memória, causal, variante no tempo e BIBO estável.

Exemplo 1.14

$$y(t) = x^2(t)$$

é um sistema não-linear, sem memória, causal, invariante no tempo e BIBO estável.

$$y(t) = \mathscr{G}\{x(t)\} = x(t) + x^*(t)$$

é um sistema sem memória, causal, invariante no tempo e BIBO estável. É não-linear, pois

$$\mathscr{G}\{jx(t)\} \neq jy(t)$$

Definição 11 (Resposta ao Impulso)

Resposta ao impulso é a saída do sistema quando a entrada é a função impulso e as condições iniciais são nulas (sistema em repouso), isto é

$$h(t) = \mathscr{G}\{\delta(t)\}$$

Exemplo 1.15

A resposta ao impulso do integrador do Exemplo 1.5 é

$$y(t) = \mathscr{G}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{t} x(\beta)d\beta \quad \Rightarrow \quad h(t) = \mathscr{G}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{t} \delta(\beta)d\beta = u(t)$$

e a resposta ao impulso do sistema do Exemplo 1.12 é

$$y(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(\beta)d\beta \quad \Rightarrow \quad h(t) = u(t+1) - u(t-1) = G_2(t)$$

A resposta ao impulso do sistema

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\beta)d\beta \quad , \quad T > 0, \quad \text{é dada por} \quad h(t) = u(t) - u(t-T)$$

Resposta ao Impulso

Exemplo 1.16

A resposta ao impulso do sistema

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\beta) \exp\big(-(t-\beta)\big) d\beta$$

é dada por

$$h(t) = \exp(-t)u(t)$$

Definição 12 (Convolução)

Convolução é a operação

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\beta)x_2(t-\beta)d\beta$$

Note que nem sempre a integral de convolução existe, como por exemplo, para $x_1(t) = x_2(t) = 1$, $x_1(t) * x_2(t)$ *não existe.*

Propriedade 4

Se

$$x_1(t) = x_1(t)u(t) \quad , \quad x_2(t) = x_2(t)u(t)$$

então

$$x_1(t) * x_2(t) = u(t)\int_{0}^{t} x_1(\beta)x_2(t-\beta)d\beta$$

Propriedade 5

O impulso é o elemento neutro da convolução.

Prova:

$$x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\beta)\delta(t-\beta)d\beta=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\alpha)\delta(\alpha)d\alpha=x(t)$$

Propriedade 6 (Comutativa)

$$x_1(t)*x_2(t)=x_2(t)*x_1(t)$$

Prova:

$$x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t-\beta)x_2(\beta)d\beta=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\alpha)x_2(t-\alpha)d\alpha=x_2(t)*x_1(t)$$

Propriedade 7 (Associativa)

$$x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t)) = (x_1(t) * x_2(t)) * x_3(t)$$

Prova:

$$x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t)) = x_1(t) * \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t-\beta) x_3(\beta) d\beta \right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\alpha) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\alpha-\beta) x_3(\beta) d\beta \right) d\alpha$$

integrando primeiro em α e depois em β, e trocando $\alpha - \beta$ por γ, tem-se

$$x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_3(\beta) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_1((t-\beta)-\gamma) x_2(\gamma) d\gamma \right)}_{x_1(t) * x_2(t)\Big|_{t-\beta}} d\beta =$$

$$x_3(t) * (x_1(t) * x_2(t))$$

Propriedade 8 (Distributiva em relação à soma)

$$x_1(t) * (x_2(t) + x_3(t)) = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$$

Prova:

$$x_1(t) * (x_2(t) + x_3(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\beta)(x_2(\beta) + x_3(\beta))d\beta = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$$

Exemplo 1.17

A convolução

$x(t) = x_1(t) * x_2(t) \quad , \quad x_1(t) = \exp(a_1 t)u(t) \; ; \; x_2(t) = \exp(a_2 t)u(t) \quad , \quad a_1 \neq a_2$

calculada pela definição produz

$$x(t) = \int_0^t \exp\left(a_1(t-\beta)\right) \exp(a_2\beta) d\beta = \frac{\exp(a_1 t)}{(a_2 - a_1)} \int_0^{(a_2-a_1)t} \exp(\beta) d\beta$$

$$= \frac{\exp(a_2 t) - \exp(a_1 t)}{(a_2 - a_1)} u(t)$$

Exemplo (cont.)

A figura mostra $x(t)$ para os valores $a_1 = -1$, $a_2 = -2$, ou seja,

$$x(t) = (\exp(-t) - \exp(-2t))\, u(t)$$

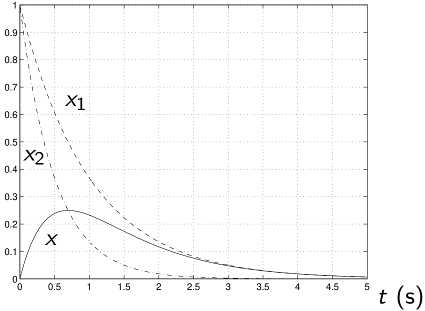

Figura: $x(t) = \big(\exp(-t) - \exp(-2t)\big)\, u(t)$ obtido da convolução de duas exponenciais $x_1(t) * x_2(t)$.

Exemplo (cont.)

Note que

$$a_2 \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad x_2 \to u(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) \to \frac{1}{-a_1}(1 - \exp(a_1 t))u(t) \;=\; u(t) \int_0^t x_1(\beta) d\beta$$

Para analisar o caso $a_2 = a_1 = a$, pode-se fazer $a_1 = a$, $a_2 = a + \Delta$ e $\Delta \to 0$, resultando em (por L'Hôpital)

$$x(t) = \exp(at)\frac{\exp(\Delta t) - 1}{\Delta}u(t) = t\exp(at)u(t)$$

Propriedade 9 (Deslocamento no tempo)

$$x(t) * \delta(t-a) = x(t-a)$$

Prova:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\beta)\delta(t-a-\beta)d\beta = x(t-a)$$

Propriedade 10 (Convoluir com degrau é integrar)

$$x(t) * u(t) = \mathscr{I}_x(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\beta)d\beta$$

Prova:

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\beta)x(\beta)d\beta = \int_{-\infty}^{t} u(t-\beta)x(\beta)d\beta + \underbrace{\int_{t}^{+\infty} u(t-\beta)x(\beta)d\beta}_{=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{t} x(\beta)d\beta$$

Exemplo 1.18

Esboce

$$\mathscr{I}_x(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\beta)d\beta$$

para os sinais

a) $x(t) = u(t) - u(t-1)$; b) $x(t) = -u(t) + 2u(t-1) - u(t-2)$ c) $x(t) = t(u(t) - u(t-1))$

Propriedade 11

$$x(t) * \sum_k a_k u(t-b_k) = \sum_k a_k \mathscr{I}_x(t-b_k)$$

Exemplo 1.19

Considere $x_1(t) = u(t) - u(t-1)$ e $x_2(t) = u(t+1) - u(t-1)$. A convolução $x_1(t) * x_2(t)$ é dada por

$$x_1(t) * x_2(t) = \mathscr{I}_{x_1}(t+1) - \mathscr{I}_{x_1}(t-1) = \mathscr{I}_{x_2}(t) - \mathscr{I}_{x_2}(t-1)$$

Exemplo 1.20

a) Determine as convoluções para os sinais

$$x_1(t) = u(t) - u(t-1) \quad , \quad x_2(t) = -u(t) + 2u(t-1) - u(t-2)$$

a.1) $x_1(t) * x_1(t)$ a.2) $x_1(t) * x_2(t)$ a.3) $x_2(t) * x_2(t)$ a.4) $x_2(t) * x_1(t)$

b) Determine as convoluções entre $x(t) = u(t) - u(t-2)$ e:
b.1) $x_1(t) = t(u(t) - u(t-1))$ b.2) $x_1(t) = \exp(-t)u(t)$

Teorema 1 (Convolução com a Resposta ao Impulso de um SLIT)

A saída de um sistema linear invariante no tempo é a convolução da resposta ao impulso com a entrada, isto é

$$y(t) = \mathscr{G}\{x(t)\} = h(t) * x(t)$$

sendo $h(t) = \mathscr{G}\{\delta(t)\}$ *a resposta ao impulso do sistema.*

Prova:

$$\mathscr{G}\{x(t)\} = \mathscr{G}\{x(t) * \delta(t)\} = \mathscr{G}\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)\delta(t-\beta)d\beta \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)\underbrace{\mathscr{G}\{\delta(t-\beta)\}}_{h(t-\beta)} d\beta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)h(t-\beta)d\beta = x(t) * h(t)$$

Propriedade 12

Sistemas lineares invariantes no tempo são causais (ou não antecipativos) se e somente se a resposta ao impulso é nula para instantes negativos, ou seja

$$h(t) = 0 \quad para \ t < 0$$

pois

$$y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x(t-\beta)h(\beta)d\beta}_{futuro} + \int_{0}^{+\infty} x(t-\beta)h(\beta)d\beta$$

Exemplo 1.21

$$y(t) = \mathscr{G}\{x(t)\} = x(t-a) \ , \ a > 0 \quad \Rightarrow \quad h(t) = \delta(t-a) \ \text{ causal}$$

$$y(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(\beta)d\beta \quad \Rightarrow \quad h(t) = G_2(t) \ \text{ não causal}$$

Propriedade 13

Um sistema linear invariante no tempo é BIBO estável se e somente se a resposta ao impulso do sistema for absolutamente integrável.

Prova:

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t-\beta)||h(\beta)|d\beta \leq B \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\beta)|d\beta$$

Portanto, se $h(t)$ for absolutamente integrável tem-se $|y(t)| < \infty$ (suficiência).

Por outro lado, $y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\beta)h(\beta)d\beta$ e, para $x(-\beta) = \text{sinal}(h(\beta))$, sendo $\text{sinal}(t) = u(t) - u(-t) = 2u(t) - 1$.
Portanto,

$$y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\beta)|d\beta$$

Como conclusão, $y(t)$ é não limitado se $h(t)$ não for absolutamente integrável (necessidade).

Exemplo 1.22

O sistema descrito pela equação

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t+2} x(\beta)d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)u(t+2-\beta)d\beta$$

tem resposta ao impulso dada por

$$h(t) = u(t+2)$$

Note que

$$h(t) * x(t) = y(t)$$

e portanto trata-se de um sistema linear invariante no tempo.

Como $h(t) \neq 0$ para $t < 0$, o sistema é não causal (é antecipativo). O sistema não é BIBO estável, pois a integral do valor absoluto de $h(t)$ diverge.

Exemplo 1.23

O sistema descrito pela equação

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi\beta} x(t-\beta) d\beta$$

tem resposta ao impulso dada por

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}$$

Note que

$$h(t) * x(t) = y(t)$$

e portanto trata-se de um sistema linear invariante no tempo.

Como $h(t) \neq 0$ para $t < 0$, o sistema é não causal (é antecipativo). O sistema não é BIBO estável, pois a integral do valor absoluto de $h(t)$ diverge.

Exemplo 1.24

O sistema descrito pela equação

$$y(t) = 2x(2t)$$

tem resposta ao impulso dada por

$$h(t) = 2\delta(2t) = \delta(t)$$

Note que

$$h(t) * x(t) = x(t) \neq y(t)$$

e portanto esse sistema linear não é invariante no tempo. Esse sistema é BIBO estável e não causal pois $y(1) = 2x(2)$.

Propriedade 14

$$\mathscr{I}_{x*y}(t) = x(t) * \mathscr{I}_y(t) = \mathscr{I}_x(t) * y(t) = u(t) * x(t) * y(t)$$

pois

$$\mathscr{I}_x(t) = x(t) * u(t)$$

e a convolução é associativa e comutativa.

Exemplo 1.25

A convolução $x(t) * y(t)$, com

$$x(t) = y(t) = u(t) - u(t-1)$$

pode ser obtida a partir da derivada de $y(t)$, dada por

$$v(t) = \delta(t) - \delta(t-1) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \mathscr{I}_v(t)$$

Portanto

$$x(t) * y(t) = x(t) * \mathscr{I}_v(t) = \mathscr{I}_{x*v}(t)$$

Como

$$x(t) * v(t) = x(t) - x(t-1) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$$

tem-se

$$x(t) * y(t) = t\big(u(t) - u(t-1)\big) + (2-t)\big(u(t-1) - u(t-2)\big)$$

Propriedade 15

$$\frac{d}{dt}\big(x(t)*y(t)\big) = \dot{x}(t)*y(t) = x(t)*\dot{y}(t)$$

pois

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)y(t-\beta)d\beta = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} y(\beta)x(t-\beta)d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)\dot{y}(t-\beta)d\beta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y(\beta)\dot{x}(t-\beta)d\beta$$

Definição 13 (Auto-função)

Um sinal de entrada é denominado auto-função de um sistema se a saída correspondente for igual ao sinal de entrada multiplicado por uma constante (em geral complexa).

Propriedade 16 (Auto-função)

O sinal $\exp(st)$, *s complexo pertencente ao domínio* Ω_h, *é uma auto-função para sistemas lineares contínuos e invariantes no tempo.*

Prova:

$$y(t) = \exp(st) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta)\exp\left(s(t-\beta)\right)d\beta = H(s)\exp(st)$$

com

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta)\exp(-s\beta)d\beta$$

O domínio Ω_h *é o conjunto dos valores de s complexos para os quais a integral é finita.*

Auto-função

A função $H(s) = \mathscr{L}\{h(t)\}$ é a transformada bilateral de Laplace da resposta ao impulso $h(t)$, com domínio Ω_h.

A transformada bilateral de Laplace de um sinal $x(t)$ (veja a Definição 12.1 no Capítulo 12) é dada por

$$X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)\exp(-s\beta)d\beta$$

com domínio Ω_x, isto é, conjunto dos $s \in \mathbb{C}$ (complexos) para os quais a integral é finita.

Propriedade 17

$$\mathscr{L}\{\exp(-at)u(t)\} = \frac{1}{s+a} \quad , \quad s \in \{s \in \mathbb{C}, Re(s+a) > 0\}$$

pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-at)u(t)\exp(-st)dt = \frac{1}{s+a}\int_{0}^{+\infty} \exp\big(-(s+a)t\big)(s+a)dt =$$

$$= \frac{1}{s+a} \quad para \ Re(s+a) > 0$$

Exemplo 1.26

A resposta ao impulso e a função de transferência do sistema descrito por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\beta)u(\beta)x(t-\beta)d\beta \qquad \text{são dadas por}$$

$$h(t) = \exp(-t)u(t) \quad , \quad H(s) = \frac{1}{s+1} \ , \ \mathrm{Re}(s+1) > 0$$

Note que o sistema é linear invariante no tempo (a resposta $y(t)$ é dada pela convolução da entrada $x(t)$ com a resposta ao impulso $h(t)$), causal ($h(t) = 0$, $t < 0$) e BIBO estável ($h(t)$ é absolutamente integrável). A resposta à entrada $x(t) = \exp(jt) + \exp(2t) + 3^t$ é dada por

$$y(t) = H(j)\exp(jt) + H(2)\exp(2t) + H(\ln 3)3^t =$$
$$= 0.707\exp\big(j(t-0.785)\big) + 0.333\exp(2t) + (0.477)3^t$$

pois $3^t = \exp(t\ln 3)$. Note que só foi possível calcular a solução $y(t)$ (chamada de forçada ou de regime, sem levar em conta condições iniciais) porque os termos da entrada $\exp(st)$ produziram $H(s)$ finitos.

Propriedade 18 (Deslocamento em t)

$$\mathscr{L}\{y(t) = x(t-\tau)\} = X(s)\exp(-s\tau) \quad , \quad \Omega_y = \Omega_x$$

Prova:

$$\mathscr{L}\{x(t-\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\exp(-st)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)\exp\big(-s(\beta+\tau)\big)d\beta = \exp(-s\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)\exp(-s\beta)d\beta$$
$$= \mathscr{L}\{x(t)\}\exp(-s\tau)$$

Exemplo 1.27

A transformada de Laplace da função degrau é dada por

$$\mathscr{L}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\beta)\exp(-s\beta)d\beta = \int_{0}^{+\infty} \exp(-s\beta)d\beta = \frac{1}{s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

e a transformada de Laplace da função degrau deslocada $u(t-\tau)$ é dada por

$$\mathscr{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}\exp(-s\tau), \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

Propriedade 19 (Transformada da Convolução)

$$\mathscr{L}\{x(t) = x_1(t) * x_2(t)\} = \mathscr{L}\{x_1(t)\}\mathscr{L}\{x_2(t)\} \quad , \quad \Omega_x = \Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$$

Prova:

$$\mathscr{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \mathscr{L}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\beta)x_2(\beta)d\beta\right\} =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\beta)\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\beta)\exp(-st)dt\right)}_{X_1(s)\exp(-s\beta)} d\beta$$

$$= X_1(s)\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\beta)\exp(-s\beta)d\beta = X_1(s)X_2(s)$$

Definição 14 (Função de Transferência)

A relação (temporal) entre saída e entrada em um sistema linear invariante no tempo é dada pelo "ganho complexo" $H(s)$ quando $x(t) = \exp(st)$

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad ; \quad H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(-st)dt, \quad s \in \Omega_h$$

$H(s)$, também denominada função de transferência do sistema, é a relação entre as transformadas de Laplace da saída $Y(s)$ e da entrada $X(s)$ para qualquer $x(t)$

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Para sistemas causais, $m \geq \ell$ (isto é, o grau do numerador é menor ou igual ao grau do denominador) e o domínio Ω_h de existência de $H(s)$ é o semi-plano à direita do polo mais à direita da função.

Sistemas lineares invariantes no tempo causais descritos por funções de transferência racionais são BIBO estáveis se e somente se os polos estiverem no interior do semi-plano esquerdo do plano complexo (isto é, polos com parte real negativa).

Exemplo 1.28 (Circuito RC)

Considere o circuito RC descrito na Figura 6.

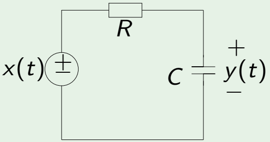

Figura: Circuito RC.

Exemplo – Circuito RC

A entrada é a fonte de tensão $x(t)$ e a saída $y(t)$ é a tensão no capacitor. O circuito é descrito pela equação

$$\dot{y} + \frac{1}{\tau}y = \frac{1}{\tau}x \quad ; \quad \tau = RC$$

ou, usando o operador $p = \dfrac{d}{dt}$,

$$\left(p + \frac{1}{\tau}\right)y = \frac{1}{\tau}x$$

A função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{1}{\tau}\frac{1}{s + 1/\tau}$$

Note que esta função de transferência é a transformada de Laplace de

$$h(t) = \frac{1}{\tau}\exp(-t/\tau)u(t)$$

Exemplo 1.29

Considere o circuito da Figura 7, com $\tau_1 = R_1 C_1 = 1$ e $\tau_2 = R_2 C_2 = 0.01$.

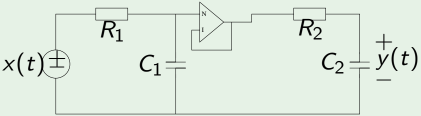

Figura: Circuito *RC* em cascata.

A função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \underbrace{\left(\frac{1/\tau_1}{s+1/\tau_1}\right)}_{H_1(s)} \underbrace{\left(\frac{1/\tau_2}{s+1/\tau_2}\right)}_{H_2(s)} = \frac{100}{s^2+101s+100}$$

Exemplo 1.30

Considere o circuito da Figura 8

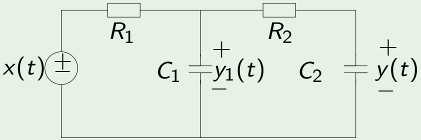

Figura: Circuito RC duplo.

$$x = R_1(C_1\dot{y}_1 + C_2\dot{y}) + y_1 \quad ; \quad y_1 = R_2C_2\dot{y} + y$$

A função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + 1}$$

Definição 15 (Resposta em frequência)

Se $s = j\omega$ pertence ao domínio da função de transferência do sistema linear invariante no tempo $H(s)$, a resposta em frequência do sistema é o valor de $H(s)$ computado para $s = j\omega$.

A resposta em frequência escreve-se como

$$M(\omega)\exp(j\phi(\omega)) = H(j\omega)$$

sendo $M(\omega)$ o módulo e $\phi(\omega)$ a fase de $H(j\omega)$

Em geral, é desenhada na forma de módulo e fase (diagrama de Bode) ou na forma polar, para $\omega \in [0, +\infty)$. Representa a resposta em regime permanente de sistemas lineares invariantes no tempo estáveis para entradas senoidais.

Propriedade 20

Se $h(t)$ é real, então $H^*(j\omega) = H(-j\omega)$, isto é $M(\omega)$ é uma função par e $\phi(\omega)$ é uma função ímpar.

Prova:

$$H^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(j\omega t)dt = H(-j\omega)$$

$$H(j\omega) = M(\omega)\exp(j\phi(\omega)) \quad \Rightarrow \quad H^*(j\omega) = M(\omega)\exp(-j\phi(\omega))$$

$$H(-j\omega) = M(-\omega)\exp(j\phi(-\omega))$$

Portanto, $M(\omega) = M(-\omega)$ *e* $-\phi(\omega) = \phi(-\omega)$.

Exemplo 1.31

Considere a linha de transmissão bifilar sem perdas descrita por

$$y(t) = x(t - T)$$

também conhecida como linha de atraso. A função de transferência é dada por

$$H(s) = \exp(-sT)$$

O módulo da resposta em frequência $H(j\omega)$ é $M(\omega) = 1$ e a fase é $\phi(\omega) = -\omega T$.

Propriedade 21 (Função de transferência racional)

A equação diferencial

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad , \quad D(p) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k \ ; \ N(p) = \sum_{k=0}^{\ell} \beta_k p^k$$

com $\alpha_m = 1$, α_k *e* β_k *coeficientes constantes e condições iniciais nulas descreve um sistema linear invariante no tempo, cuja função de transferência é*

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

pois, para a entrada $x(t) = \exp(st)$ *tem-se a saída* $y(t) = H(s)\exp(st)$, *e portanto*

$$D(p)H(s)\exp(st) = N(p)\exp(st) \quad \Rightarrow \quad H(s)D(s) = N(s)$$

$H(s)$ *é uma função racional, ou seja, é dada pela razão de dois polinômios em* s.

Definição 16 (Zeros (finitos))

Os zeros de uma função $H(s)$, s complexo, são os valores de s para os quais $H(s) = 0$. A multiplicidade da raiz s é denominada de ordem do zero.

Definição 17 (Polos)

Os polos de uma função $H(s)$, s complexo, são os valores de s para os quais $1/H(s) = 0$. A multiplicidade da raiz é denominada de ordem do polo.

Em funções racionais, os polos são as raízes do denominador e os zeros são as raízes do numerador.

Polos e Zeros em funções racionais

A diferença entre o número de polos m e de zeros finitos ℓ é chamada de grau relativo da função de transferência.

Definindo-se

- Polos: valores de s para os quais $H(s)$ não é finito
- Zeros: valores de s para os quais $1/H(s)$ não é finito

tem-se $m - \ell$ zeros no infinito e, portanto, o mesmo número de polos e zeros.

Exemplo 1.32 (Circuito *RC*)

O circuito *RC* do Exemplo 1.28 é descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}$$

A resposta em frequência é dada por

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \quad ; \quad \phi(\omega) = -\arctan(\tau\omega)$$

Note que trata-se de um filtro passa-baixas, com a fase variando de 0 a -90 graus quando a frequência varia de zero a infinito e $\phi(1/\tau) = -45$ graus. O filtro *RC* possui um polo em $s = -1/\tau$.

Propriedade 22

A resposta em regime de um sistema linear invariante no tempo estável com função de transferência $H(s)$, com $h(t)$ real e $j\omega \in \Omega_h$, para a entrada $x(t) = \cos(\omega t)$, é

$$y(t) = M(\omega)\cos(\omega t + \phi(\omega))$$

e, para a entrada $x(t) = sen(\omega t)$, é

$$y(t) = M(\omega)sen(\omega t + \phi(\omega))$$

Prova:

$$y(t) = \mathscr{G}\{\cos(\omega t)\} = \frac{1}{2}\mathscr{G}\{\exp(j\omega t)\} + \frac{1}{2}\mathscr{G}\{\exp(-j\omega t)\} =$$

$$= \frac{1}{2}H(j\omega)\exp(j\omega t) + \frac{1}{2}H(-j\omega)\exp(-j\omega t) =$$

$$= \frac{1}{2}M(\omega)\exp(j\omega t + j\phi(\omega)) + \frac{1}{2}M(\omega)\exp(-j\omega t - j\phi(\omega)) = M(\omega)\cos(\omega t + \phi(\omega))$$

Exemplo 1.33

A resposta ao impulso do sistema

$$y(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(\beta)d\beta$$

é dada por $h(t) = u(t+1) - u(t-1)$ e a função de transferência $H(s)$ por

$$H(s) = \frac{\exp(s)}{s} - \frac{\exp(-s)}{s} \quad \Rightarrow \quad H(j\omega) = 2\frac{\text{sen}(\omega)}{\omega}$$

Note que o sistema é linear, invariante no tempo, não-causal e BIBO-estável. A resposta em regime (forçada) para $x(t) = \cos(3t) + \text{sen}(2t)$ é dada por

$$y_f(t) = 0.0941\cos(3t) + 0.909\text{sen}(2t)$$

pois

$$H(j3) = 2\frac{\text{sen}(3)}{3} = 0.0941 \quad , \quad H(j2) = 2\frac{\text{sen}(2)}{2} = 0.909$$