→ Resolução P1 – 2015 :

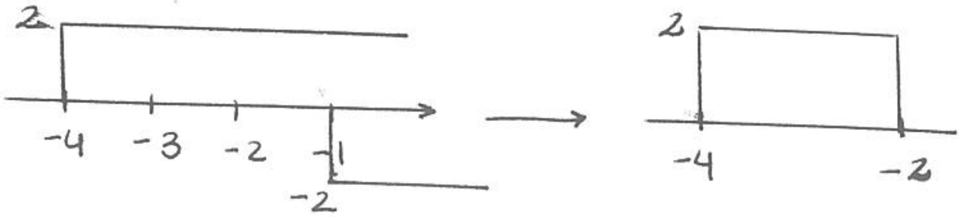
Questão 1 : $x[n] = 2(u[n+1] - u[n-2])$

a) Esboce $x[3-n]$

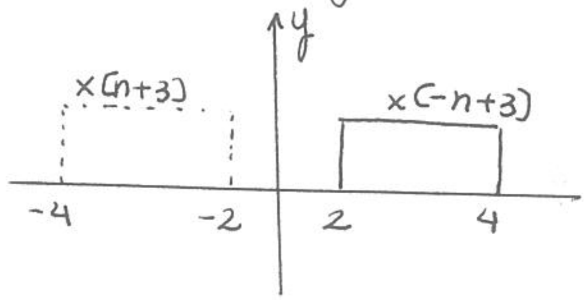
1) Deslocar } Passos para
2) Inverter } resolução

1) Deslocar $x[n+3] = 2(u[(n+3)+1] - u[n+3-2])$

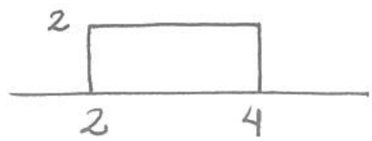
$$x[n+3] = 2(u[n+4] - u[n+1])$$



2) Inverter $x[-n+3] = 2(u[-n+4] - u[-n+1])$ é só espelhar o $x[n+3]$ no eixo y.



Resposta:



b) Escreva $y[n] = x[3-n]$ como a soma de um sinal par $y_p[n]$ mais um sinal ímpar $y_i[n]$.

$$y[n] = y_p[n] + y_i[n]$$

$$\rightsquigarrow y_p[n] = \frac{y[n] + y[-n]}{2} \qquad \rightsquigarrow y_i[n] = \frac{y[n] - y[-n]}{2}$$

$$y[n] = x[3-n] = 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + 2\delta[n-4]$$

$$y[-n] = x[n+3] = 2\underbrace{\delta[-n-2]}_{\delta[n+2]} + 2\underbrace{\delta[-n-3]}_{\delta[n+3]} + 2\underbrace{\delta[-n-4]}_{\delta[n+4]}$$

$$y_p[n] = \frac{1}{2}\left(2\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + 2\delta[n+2] + 2\delta[n+3] + 2\delta[n\right.$$

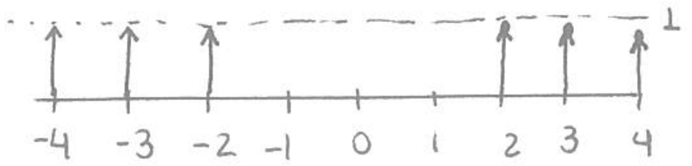
$$\boxed{y_p[n] = \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] + \delta[n+2] + \delta[n+3] + \delta[n+4]}$$

$$y_i[n] = \frac{1}{2}\left(2\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + 2\delta[n-4] - 2\delta[n+2] - 2\delta[n+3] - 2\delta[n+4]\right)$$

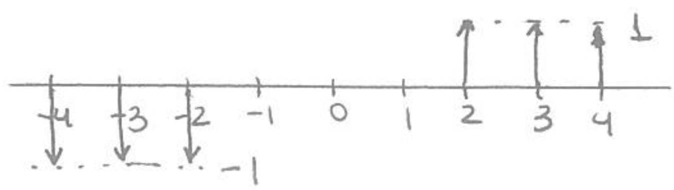
$$\boxed{y_i[n] = \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] - \delta[n+2] - \delta[n+3] - \delta[n+4]}$$

c) Esboce $y_p[n]$ e $y_i[n]$

$y_p[n]$



$y_i[n]$



Questão 2: Considere o sistema linear invariante no tempo descrito por:

$$y[n] = x[n] * (\rho^{-n} u[n]) \qquad 0<\rho<1$$

a) BIBO estável ou não BIBO-estável

↝ Como o próprio enunciado diz: esse é um SLIT, logo podemos aplicar a seguinte propriedade:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

SLITs são BIBO estáveis se e somente se a resposta ao impulso é absolutamente somável:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty \longrightarrow \text{BIBO estável}$$

Voltando ao probelma!

$$h[n] = \rho^{-n} u[n] \qquad 0<\rho<1$$

$\sum |\rho^{-n} u[n]|$ diverge, pois $\sum 1/\rho \; u[n] \longrightarrow \infty \quad 0<\rho<1$

∴ NÃO BIBO-estável

b) Causal ou não causal

↝ SLITs são causais se $h[n] = \emptyset$ para $n<\emptyset$. Como temos uma constante multiplicando uma função degrau, então

$$u[n] = \emptyset \rightarrow n<0 \Rightarrow h[n] = \emptyset \text{ p/ } n<0$$

∴ Causal

Questão 3:

a) Determine a função de transferência do sistema linear invariante no tempo causal dado por

$$y[n+1] + 3y[n] = 3x[n+1]$$

A função de transferência é determinada por

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Vamos usar aqui a definição de autofunção

$$x[n] = z^n$$
$$y[n] = H(z)\, z^n$$

Substituindo:

$$H(z).\, z^{n+1} + 3H(z)\, z^n = 3z^{n+1}$$

$$H(z) = \frac{3z^{n+1}}{z^{n+1} + 3z^n}$$

Dividindo por z^n

$$\boxed{H(z) = \frac{3z}{z+3} \quad |z| > 3}$$

b) Determine a solução forçada para a entrada

$$x[n] = (2^n) \times (3^n)$$

$$x[n] = 6^n \rightarrow z = 6$$

$$y_f[n] = H(z).\, x[n]$$

$$y_f[n] = H(6).\, 6^n = \frac{6.3}{6+3}.\, 6^n$$

$$\boxed{y_f[n] = 2.6^n}$$

Questão 4: A sequência $x[n]$ vale zero para $n<0$ e tem transformada z dada por

$$X(z) = \frac{14z^2 - 9z}{2z^2 - 3z + 1} = \frac{14z^2 - 9z}{(z-1)(2z-1)} \qquad |z|>1$$

a) $x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} \frac{14z^2 - 9z}{2z^2 - 3z + 1}$$

$$x(0) = \frac{14}{2} = 7$$

$$\boxed{x[0] = 7}$$

b) $x[1]$

$$\begin{array}{l|l} 14z^2 - 9z & 2z^2 - 3z + 1 \\ \hline -(14z^2 - 21z + 7) & 7 + 6z^{-1} \\ \hline 12z - 7 & \\ -\ 12z - 18 + 6z^{-1} & \\ \hline 11 - 6z^{-1} & \end{array}$$

$x(1)$

$$\boxed{x[1] = 6}$$

c) $x[+\infty] = \lim_{z \to 1} (z-1)X(z)$

$$x[+\infty] = \lim_{z \to 1} \frac{\cancel{(z-1)}.(14z^2 - 9z)}{\cancel{(z-1)}(2z-1)}$$

$$x(\infty) = \lim_{z \to 1} \frac{14z^2 - 9z}{2z-1}$$

$$x(\infty) = \frac{14-9}{1} = 5$$

$$\boxed{x[\infty] = 5}$$

Questão 5: para $x(n) = \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)$ e

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}$$

determine e esboce $w(n) = x(n) * y(n)$

Temos que $x(n) * y(n) \Rightarrow \mathcal{Z}\{x(n)\}\, \mathcal{Z}\{y(n)\}$

$\mathcal{Z}\{y(n)\}$ já temos que foi dado pelo enunciado

$$\mathcal{Z}\{y(n)\} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}$$

Mas, $\mathcal{Z}\{x(n)\}$ não temos, bora calcular!

$$x(n) = \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)$$

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \mathcal{Z}\{\delta(n+1)\} + \mathcal{Z}\{\delta(n)\} + \mathcal{Z}\{\delta(n-1)\}$$

→ Temos as seguintes propriedades ↗ $\mathcal{Z}\{\delta(n)\} = 1$
→ $\mathcal{Z}\{\delta(n-m)\} = z^{-m}$
↘ $\mathcal{Z}\{\delta(n+m)\} = z^{+m}$

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = z^{1} + 1 + z^{-1}$$

$$w(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\} \cdot \mathcal{Z}\{y(n)\} =$$

$$w(z) = (z + 1 + z^{-1}) \cdot (z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3})$$

$$1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4}$$

$$w(z) = 1 + 3z^{-1} + 6z^{-2} + 5z^{-3} + 3z^{-4}$$

Estamos em $w(z)$ queremos passar para $w(n)$ → transformada inversa!

$$\boxed{w[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 5\delta[n-3] + 3\delta[n-4]}$$

Questão 6: Determine a sequência $x(n)$ cuja transformada z é dada por:

$$X(z) = \frac{5}{(z+2)^2} \qquad |z|>2$$

Propriedades

① $\mathcal{Z}\{x(n-m)u(n-m)\} = z^{-m}\,\mathcal{Z}\{x(n)u(n)\}$

② $\mathcal{Z}\{\binom{n}{m} a^{n-m} u(n)\} = \dfrac{z}{(z-a)^{m+1}}$

$$X(z) = z^{-1}\left(\frac{5z}{(z+2)^2}\right)$$

②

$$x(n)u(n) = \binom{n}{1}(-2)^{n-1}u[n]$$

①

$$\boxed{x[n] = 5(n-1).(-2)^{n-2}u[n-1]}$$

Questão 7: Determine a sequência $x(n)$ cuja transformada z é dado por

$$X(z) = \frac{5z^2-z}{z^2+z-12} = \frac{5z^2-z}{(z-3)(z+4)} \qquad 3<|z|<4$$

$$X(z) = z.\ \frac{5z-1}{(z-3)(z+4)} \longrightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{A^{\,=2}}{(z-3)} + \frac{B^{\,=3}}{(z+4)}$$

$$X(z) = \underbrace{\frac{2z}{(z-3)}}_{|z|>3} + \underbrace{\frac{3z}{(z+4)}}_{|z|<4}$$

$$X(z) = \frac{2z}{z-3} + \frac{3z}{z+4} \longrightarrow \mathcal{Z}\{-a^n \mu[-n-1]\} = \frac{z}{z-a} \quad |z|<|a|$$

$|z|>3$

$$\mathcal{Z}\left\{\binom{n}{m} a^{n-m} \mu[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}} \quad |z|>|a|$$

$$\boxed{-3.(-4)^n \mu[-n-1]}$$

$$\boxed{2.3^n \mu[n]}$$

$$\boxed{x[n] = 2.3^n \mu[n] - 3(-4)^n \mu[-n-1]}$$

Questão 8: A transformada z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta X é dada por

$$\mathcal{E}\{z^X\} = \sum_k z^k . Pr\{X=k\} = \frac{5-2z}{z^2-6z+8} = \frac{5-2z}{(z-2)(z-4)}$$

$|z|<2$

a) $Pr\{X=0\} = p[0] \Rightarrow z=0$

$$\boxed{Pr\{X=0\} = 5/8}$$

b) $$Pr\{X=1\} = \frac{d}{dz}\left(\frac{5-2z}{z^2-6z+8}\right)\Bigg|_{z=0} = \frac{(-2)(z^2-6z+8)-(5-2z)(2z-6)}{(z^2-6z+8)^2}$$

$$Pr\{X=1\} = \frac{(-2).8-5.(-6)}{8^2} = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$$

$$\boxed{Pr\{X=1\} = 7/32}$$

c) $\mathcal{E}\{X\} = \sum k \Pr\{X=k\} = z \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{5-2z}{z^2-6z+8}\right)\Bigg|_{z=1}$

$$\mathcal{E}\{X\} = z.\left(\frac{(-2)(z^2-6z+8)-(5-2z)(2z-6)}{(z^2-6z+8)^2}\right)\Bigg|_{z=1}$$

$$= 1.\left(\frac{(-2)(1-6+8)-(5-2)(2-6)}{(1-6+8)^2}\right)$$

$$= \frac{-2.3-3.(-4)}{3^2} = \frac{-6+12}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\mathcal{E}\{X\} = 2/3}$$

Questão 9: Considere o sinal

$$x(n) = 2 + 2\,\mathrm{sen}(\pi/5\, n) + \cos(\pi/2\, n)$$

a) Determine o período fundamental N de $x[n]$

$$\frac{\pi}{5} = 2\pi.\frac{1}{\underbrace{10}_{N_1}} \qquad \frac{\pi}{2} = 2\pi.\frac{1}{\underbrace{4}_{N_2}}$$

$$N = m_1.N_1 = m_2.N_2$$

$$\underset{\uparrow\atop 2}{m_1}.10 = \underset{\uparrow\atop 5}{m_2}.4 = 20 \longrightarrow \boxed{N = 20}$$

b) Determine os coeficientes c_k da série exponencial de Fourier $x[n]$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}kn} - e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right)$$

$$x[n] = 2e^{0} + 2.\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{20}2n} - e^{-j\frac{2\pi}{20}2n}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{20}5n} + e^{-j\frac{2\pi}{20}5n}\right)$$

$\boxed{c_0 = 2}$ $\boxed{c_2 = \frac{1}{j}}$ $\boxed{c_{-2} = c_{18} = -\frac{1}{j}}$

$\boxed{c_5 = 1/2}$ $\boxed{c_{-5} = c_{15} = 1/2}$

demais nulos

c) $$P_m = \sum |c_k|^2 = \underset{c_0^2}{4} + \underset{c_{18}^2}{1} + \underset{c_2^2}{1} + \underset{c_5^2}{\frac{1}{4}} + \underset{c_{15}^2}{\frac{1}{4}} = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\boxed{P_m = \frac{13}{2}}$$

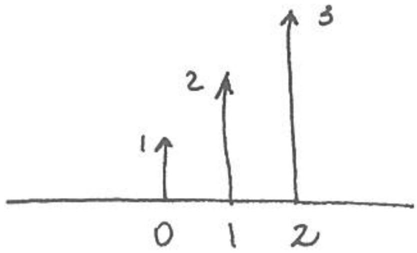
Questão 10: Considere o sinal periódico discreto $x[n]$ dado por

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[n-k5] \qquad p[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

e sua representação em série discreta de Fourier

a) Determine a expressão dos coeficientes c_k.

$$c_k = \frac{1}{N} \sum x(n) \exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right)$$



$N = 5$

$$c_k = \frac{1}{5} \sum_{-1,-2,0,1,2} x(n) \exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right)$$

$$\boxed{c_k = \frac{1}{5}\left(1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{5}k} + 3e^{-j\frac{2\pi}{5}2k}\right)}$$

b) O valor de c_0

$$c_0 = 1/5\,(1+2+3) = 6/5 \longrightarrow \boxed{c_0 = \frac{6}{5}}$$

c) $P_m = \sum |c_k|^2 = \frac{1}{N} \sum |x(n)|^2 = \frac{1}{5}(1+4+9)$

$$\boxed{P_m = \frac{14}{5}}$$