

CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS

- Números complexos
- Representação de funções
- Integral e derivada
- Resolução de sistemas lineares de equações
- Matrizes e vetores

NOTAÇÃO E INFORMAÇÕES BÁSICAS

Número complexo

$$z = \rho \exp(j\theta), \quad \rho > 0, \quad |z| = \rho, \quad \angle z = \theta$$

Teorema de Euler

$$\exp(j\theta) = \cos(\theta) + j\text{sen}(\theta) \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}$$

de Moivre

$$\exp(j\theta)^\ell = \exp(j\ell\theta) = \cos(\ell\theta) + j\text{sen}(\ell\theta)$$

Degrau $u(t)$ e Gate $G_T(t)$ (sinais contínuos, $t \in \mathbb{R}$)

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad , \quad G_T(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2)$$

Função Sampling $\text{Sa}(x)$

$$\text{Sa}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}, \quad \text{Sa}(0) = 1$$

Sinais $x(t)$ e $y(t)$ ortogonais

$$x(t) \perp y(t) \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = 0$$

sendo $y^*(t)$ o complexo conjugado de $y(t)$.

Degrau e Impulso (sinais discretos, $n \in \mathbb{Z}$)

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & \text{demais valores} \end{cases} \quad , \quad \delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{demais valores} \end{cases}$$

Soma Geométrica

$$\sum_{i=0}^m \rho^i = \frac{1 - \rho^{m+1}}{1 - \rho}$$

a) Verifique que $z_1 = 1 + j$ e $z_2 = 2 - j$ ($j = \sqrt{-1}$) são solução do sistema linear abaixo

$$\begin{cases} (2 - j)z_1 + 2z_2 = 7 - j \\ -2jz_1 + (1 + j)z_2 = 5 - j \end{cases}$$

b) Verifique que o módulo da função de transferência abaixo tem um máximo $M(\omega_r) = 2/\sqrt{3}$ na frequência $\omega_r = 1/\sqrt{2}$, para $s = j\omega$.

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

c) Verifique que $a = -1$ e $b = 1$ tornam $x_3(t)$ ortogonal a $x_1(t)$ e a $x_2(t)$, para

$$x_1(t) = G_1(t - 0.5) \quad , \quad x_2(t) = tG_1(t - 0.5) \quad , \quad x_3(t) = (at^2 + bt - \frac{1}{6})G_1(t - 0.5)$$

d) Mostre que o sinal

$$x[n] = 2 \exp(n) \operatorname{sen}(2n + \pi/6)$$

pode ser expresso como uma soma de exponenciais complexas

$$x[n] = \exp(n + j(2n - \pi/3)) + \exp(n - j(2n - \pi/3))$$

Note que

$$\begin{aligned} x[n] &= 2 \exp(n) \left(\frac{1}{2j} \exp(j(2n + \pi/6)) - \frac{1}{2j} \exp(-j(2n + \pi/6)) \right) \\ &= \exp(n) \left(-j \exp(j(2n + \pi/6)) + j \exp(-j(2n + \pi/6)) \right) \\ &= \exp(n) \left(\exp(-j\pi/2) \exp(j(2n + \pi/6)) + \exp(j\pi/2) \exp(-j(2n + \pi/6)) \right) \\ &= \exp(n + j(2n - \pi/3)) + \exp(n - j(2n - \pi/3)) \end{aligned}$$

e) Mostre que o sinal

$$x[n] = 10j \exp((3 + j)n) - 10j \exp((3 - j)n)$$

pode ser expresso como

$$x[n] = \rho \exp(\alpha n) \cos(\omega n + \theta) \quad \rho > 0, \omega > 0$$

com ρ , α , ω e θ reais, dados por

$$x[n] = 20 \exp(3n) \cos(n + \pi/2)$$

Note que

$$\begin{aligned} x[n] &= 10j \exp((3 + j)n) - 10j \exp((3 - j)n) \\ &= 10 \exp(2n) \left(\exp(j(n + \pi/2)) + \exp(-j(n + \pi/2)) \right) \\ &= 20 \exp(3n) \cos(n + \pi/2) \end{aligned}$$

f) Considere o sistema descrito pela equação a diferenças

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

com $x[n] = z^n$.

Mostre que o módulo de $y[n]$, para $z = \exp(j\omega)$, é dado por

$$|y[n]| = |j \exp(-j\omega/2) \text{sen}(\omega/2)| = |\text{sen}(\omega/2)|$$

Esboce $|y[n]|$ para ω entre $-\pi$ e $+\pi$.

Note que, para $x[n] = z^n$, tem-se

$$y[n] = \frac{(1 - z^{-1})z^n}{2}$$

e com $z = \exp(j\omega)$

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{(1 - \exp(-j\omega)) \exp(j\omega n)}{2} = \frac{(\exp(j\omega/2) - \exp(-j\omega/2)) \exp(-j\omega/2) \exp(j\omega n)}{2} \\ &= \frac{j(\exp(j\omega/2) - \exp(-j\omega/2)) \exp(-j\omega/2) \exp(j\omega n)}{2j} = j \text{sen}(\omega/2) \exp(-j\omega/2) \exp(j\omega n) \end{aligned}$$