Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado. Use três algarismos significativos. Números complexos devem ser representados na forma polar, com ângulo em radianos.

1ª Questão: a) Determine a função de transferência do sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 4 & 7 \\ 6 & 6 & 2 & 5 & 8 \\ 5 & 7 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v$$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

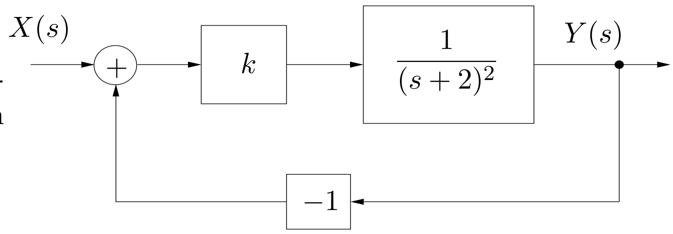
b) Determine a solução forçada (regime permanente) para a entrada $x(t) = 100 + 100\exp(-3t)$

2ª Questão: a) O sistema abaixo é controlável? Justifique.

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 4 & 11 & -3 \\ 2 & 10 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 1 \end{bmatrix} v$$

b) Quantos autovalores são controláveis e quantos não são? Justifique

$3^{\underline{a}}$ Questão: Determine a sensibilidade do ganho DC ($s = 0$) do sistema em malha fechada em função do ganho k do compensador para $k = 6$



$4^{\underline{a}}$ Questão: Considere um sistema linear invariante no tempo (A, b, c, d) com forma de Jordan diagonal

Assinale a(s) alternativa(s) incorreta(s):

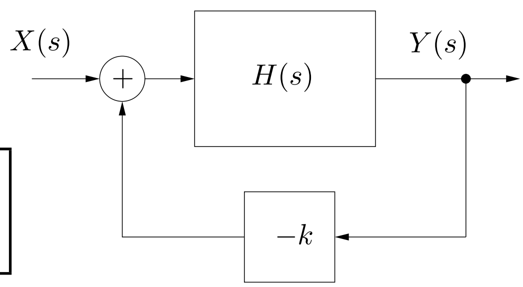
- Se todos os autovalores de A forem idênticos e nenhum elemento de c for nulo o sistema é observável
- Se todos os autovalores de A forem distintos e nenhum elemento de b for nulo o sistema é controlável
- Se todos os autovalores de A forem distintos e nenhum elemento de c for nulo o sistema é observável
- Se todos os autovalores de A forem idênticos e nenhum elemento de b for nulo o sistema é controlável
- O sistema não é controlável nem observável

$5^{\underline{a}}$ Questão: Determine os valores de γ para que o sistema abaixo não seja controlável

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \ , \ b = \begin{bmatrix} 2\gamma \\ 2 \end{bmatrix}$$

$6^{\underline{a}}$ Questão: Determine o intervalo para k tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{2s}{8s^4 + 16s^3 + 24s^2 + 10} \ ,$$



$7^{\underline{a}}$ Questão: O sistema linear invariante no tempo $\dot{v} = Av$ é tal que $P = P' > 0$ produz

$$A'P + PA = \begin{bmatrix} -2\beta & \beta \\ \beta & -1 \end{bmatrix}$$

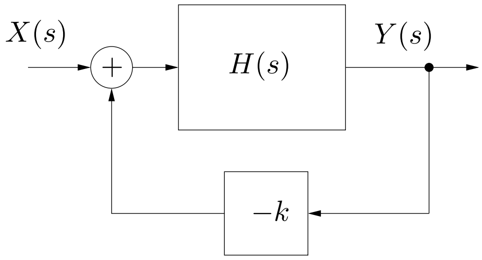
Para quais valores de β a estabilidade assintótica do sistema está assegurada?

8ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo $\dot{v} = Av$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e a equação de Lyapunov $A'P + PA = -24\mathrm{I}$. Determine a solução P e conclua, em função da solução obtida, sobre a estabilidade assintótica do sistema.

9ª Questão: Considere o sistema realimentado mostrado na figura com

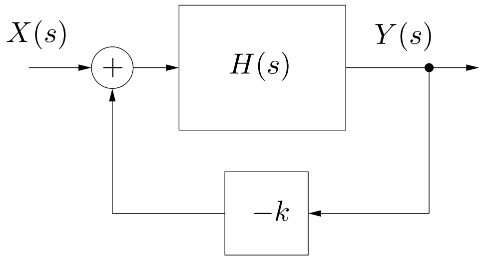


$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 - 3s + 2} = \frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s-2)}$$

a) Determine os pontos de cruzamento com o eixo real

b) Determine os pontos de cruzamento com o eixo imaginário, o correspondente valor de k e esboce (no almaço) o lugar da raízes

10ª Questão: Considere o sistema realimentado mostrado na figura com



$$H(s) = \frac{s+3}{s(s+2)(s+4)(s+2+2j)(s+2-2j)}$$

a) Esboce (nas folhas de papel almaço) o lugar das raízes para o sistema realimentado (eixo real e assíntotas)

b) Determine o ponto de encontro das assíntotas no eixo real

Lyapunov: Considere o sistema $\dot{v} = f(v)$. O ponto de equilíbrio $\bar{v} = 0$ é assintoticamente estável se existir um domínio Ω contendo a origem e uma função escalar $\psi(v)$ diferenciável tal que

$$\psi(0) = 0 \quad , \quad \psi(v) > 0 \;\forall v \in \Omega - \{0\} \;\text{ e }\; \dot{\psi}(v) = \frac{d}{dt}\psi(v) < 0 \;\forall v \in \Omega - \{0\}$$

Lyapunov (SLIT): A solução da equação de Lyapunov $A'P + PA = -Q$, $\forall Q = Q' > 0$, é única, simétrica e definida positiva sse todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa.

Controlável se e somente se $rank\big(\mathrm{Ctrb}(A,b)\big) = n$. Observável se e somente se $rank\big(\mathrm{Obsv}(A,c)\big) = n$.

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad , \quad \mathrm{Obsv}(A,c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{Ctrb}(A,b) = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

Decomposição canônica: $\bar{v} = Pv$

Se *rank* de $\mathrm{Ctrb}(A,b) = r < n$, P^{-1} é formada por colunas de 1 a r LI de $\mathrm{Ctrb}(A,b)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x \quad , \quad y = \begin{bmatrix} \bar{c}_c & \bar{c}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Se *rank* de $\mathrm{Obsv}(A,c) = r < n$, P é formada por linhas de 1 a r LI de $\mathrm{Obsv}(A,c)$ mais vetores LI

Sensibilidade de $f(x,y)$ em relação a x: $\quad \dfrac{x}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Lugar das Raízes: $1 + kH(s) = 0$, $H(s) = N(s)/D(s) \;\Rightarrow\; D(s) + kN(s) = 0$

$$D(s) = \sum_{r=0}^{m} \alpha_r s^r \; , \; \alpha_m = 1 \quad , \quad N(s) = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r s^r$$

1) Simetria em relação ao eixo real.

2) Os pólos e os zeros (finitos) de malha aberta fazem parte do lugar das raízes para, respectivamente, $k = 0$ e $k \to +\infty$.

3) Condição de fase: $\quad \displaystyle\sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) = \pi$

sendo $\phi_r(s) = \angle(s-\lambda_r)$ o ângulo do vetor do pólo λ_r até o ponto s do lugar das raízes e $\varphi_r(s) = \angle(s-\gamma_r)$ o ângulo do vetor do zero γ_r até o ponto s do lugar das raízes.

4) Condição de módulo: $\quad k = \displaystyle\Big(\prod_{r=1}^{m} |s-\lambda_r|\Big) \Big/ \Big(\prod_{r=1}^{\ell} |s-\gamma_r|\Big)$

5) Eixo real: O lugar das raízes no eixo real está sempre à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros reais.

6) Ângulo de partida dos pólos: $\quad \displaystyle\phi_i(s)\Big|_{s\approx\lambda_i} = \pi + \sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{m} \phi_r(s)$

7) Ângulo de chegada aos zeros: $\quad \displaystyle\varphi_i(s)\Big|_{s\approx\gamma_i} = \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{\ell} \varphi_r(s)$

8) O número de assíntotas η é igual ao número de zeros no infinito, isto é, $\eta = m - \ell$

9) Ângulos das assíntotas: $\quad \dfrac{\pi(1+2r)}{m-\ell} \quad , \quad \beta_\ell > 0 \quad , \quad r \in \mathbb{Z}$

10) Encontro das assíntotas ($\eta \geq 2$): no eixo real no ponto $\displaystyle\frac{1}{\eta}\left(\sum_{r=1}^{m} \mathrm{Re}(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{\ell} \mathrm{Re}(\gamma_r)\right)$

11) Cruzamento com o eixo real: Os pontos do lugar das raízes de chegada ou partida do eixo real, quando existem, satisfazem a equação $N(s)\dot{D}(s) = D(s)\dot{N}(s)$

12) Cruzamento com o eixo imaginário: ocorrem em $s = \pm j\omega$, com $\omega \geq 0$, solução de $D(s) + kN(s) = 0$