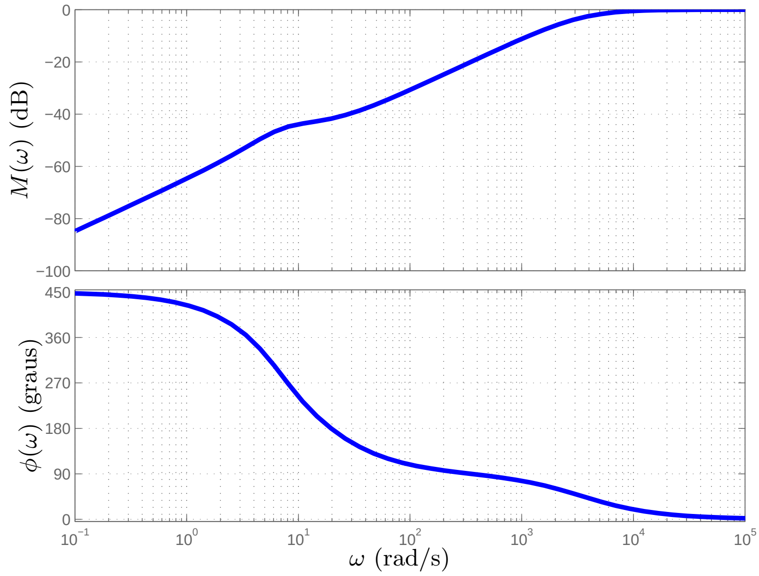
1ª Questão: Determine (com valores aproximados) a saída persistente (em regime) para a entrada $x(t) = 100 + 100\cos(300t)$ do sistema estável dado pela função de transferência e diagrama de Bode (módulo em dB e fase em graus) abaixo.

$$H(s) = \frac{s^3 - 25s^2 + 100s}{s^3 + 3510s^2 + 35050s + 175000}$$



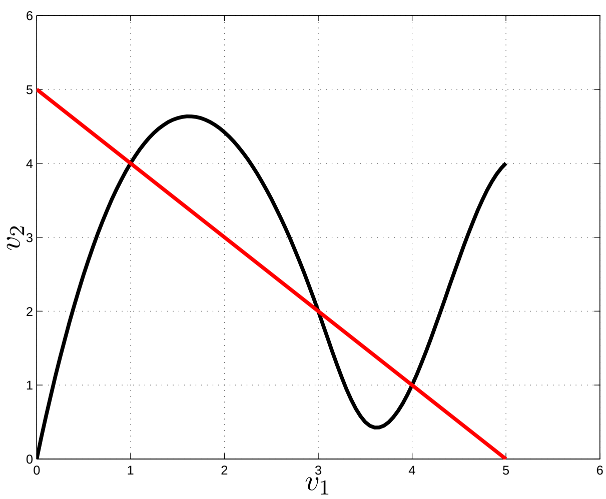
$$y_f(t) = \underbrace{H(0)}_{=0}100 + M(300)\cos(300t + \phi(300)) \ , \ M(300) = |H(j300)|, \phi(300) = \angle H(j300)$$

$$M(300) \approx -20 \text{ dB} = 0.1, \ \phi(300) \approx +90 \text{ graus}, \ y_f(t) = 8.56\cos(300t + 1.60) \approx 10\cos(300t + 90^o)$$

2ª Questão: Determine os pontos de equilíbrio do diodo túnel descrito pelas equações abaixo e pela relação $v_2 = f(v_1)$ ao lado quando $x = 5$.

$$\dot{v}_1 = -f(v_1) + v_2$$
$$\dot{v}_2 = -v_1 - v_2 + x$$

$$\dot{v}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 5 - v_1 \ , \ \dot{v}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = f(v_1)$$



$$\Rightarrow \quad (1,4), (3,2), (4,1)$$

3ª Questão: Determine a função de transferência $H(s) = Y(s)/X(s)$ do sistema cuja realização (A, b, c, d) é dada por

$$\begin{aligned}\dot{v} &= Av + bx \\ y &= cv + dx\end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix},\ d = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = 2 + \frac{10s^4 + 9s^3 + 8s^2 + 7s + 6}{s^5 + s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5} = \frac{2s^5 + 12s^4 + 13s^3 + 14s^2 + 15s + 16}{s^5 + s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5}$$

4ª Questão: Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} v \ , \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$, isto é, a transformada de Laplace unilateral de $v(t)$
b) Usando a transformada inversa de Laplace, determine $v(t)$

$$V(s) = \frac{1}{(s+2)^2 + 1} \begin{bmatrix} s+2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad v(t) = \exp(-2t) \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \mathrm{sen}(t) \end{bmatrix} u(t)$$

5ª Questão: Sabendo que os autovalores de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ são 1, 2 e 3, obtenha uma expressão analítica para A^{-1} em termos de A^0, A e A^2

$$A^{-1} = \frac{1}{6}(A^2 - 6A + 11A^0)$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

6ª Questão: Determine uma transformação Q que diagonaliza a matriz A, isto é, tal que $Q^{-1}AQ$ seja diagonal

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

7ª Questão: Determine a solução $v(t)$ para o sistema

$$\dot{v} = Av,\ v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q^{-1} = Q, v(t) = Q \exp\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} t \right) Q^{-1} v(0) &= Q \begin{bmatrix} \exp(-3t) & t\exp(-3t) \\ 0 & \exp(-3t) \end{bmatrix} Q^{-1} v(0) \\ &= \begin{bmatrix} \exp(-3t) \\ t\exp(-3t) + 2\exp(-3t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8ª Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} , \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$

b) Determine uma matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \ , \ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função $y(t) = 5 + t\exp(-3t)\cos(2t)$.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-3)\cos(2t) & -\exp(-3)\mathrm{sen}(2t) & t\exp(-3)\cos(2t) & -t\exp(-3)\mathrm{sen}(2t) \\ 0 & \exp(-3)\mathrm{sen}(2t) & \exp(-3)\cos(2t) & t\exp(-3)\mathrm{sen}(2t) & t\exp(-3)\cos(2t) \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-3)\cos(2t) & -\exp(-3)\mathrm{sen}(2t) \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-3)\mathrm{sen}(2t) & \exp(-3)\cos(2t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \bar{c}\exp(At)\bar{v}(0)$$

10ª Questão: Determine a resposta ao degrau (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} x$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 9s + 12}{s^2 + 5s + 6} \ , \ Y_u(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2} - \frac{2}{(s+3)} \ , \ y_u(t) = \big(2 + \exp(-2t) - 2\exp(-3t)\big)u(t)$$