

# EA616 — Análise Linear de Sistemas

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Universidade Estadual de Campinas

1<sup>o</sup> Semestre 2018: Preliminares

## Tópicos principais

- Números complexos
- Representação de funções
- Integral e derivada
- Resolução de sistemas lineares de equações
- Frações parciais
- Matrizes e vetores

# Notação e Informações Básicas

Número complexo

$$z = \rho \exp(j\theta), \quad \rho > 0, \quad |z| = \rho, \quad \angle z = \theta$$

Teorema de Euler

$$\exp(j\theta) = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}$$

de Moivre

$$\exp(j\theta)^n = \exp(jn\theta) = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$$

## Notação e Informações Básicas

Degrau  $u(t)$  e Gate  $G_T(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}, \quad G_T(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2)$$

Sinais  $x(t)$  e  $y(t)$  ortogonais

$$x(t) \perp y(t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = 0$$

sendo  $y^*(t)$  o complexo conjugado de  $y(t)$ .

Função Sampling  $Sa(x)$

$$Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad Sa(0) = 1$$

## Soma de exponenciais complexas

**a)** Reescreva a função abaixo: i) em termos de uma exponencial real vezes uma soma ponderada de seno e cosseno; ii) em termos de uma exponencial real vezes cosseno com defasagem.

$$x(t) = (3 + j4) \exp((5 + 3j)t) + (3 - j4) \exp((5 - 3j)t)$$

## Soma de exponenciais complexas

$$\begin{aligned}x(t) &= \exp(5t) (3(\exp(3jt) + \exp(-3jt)) + (j4)(\exp(3jt) - \exp(-3jt))) \\ &= \exp(5t) (6 \cos(3t) - 8 \sin(3t))\end{aligned}$$

Denotando  $\phi = \arctan(4/3)$ ,

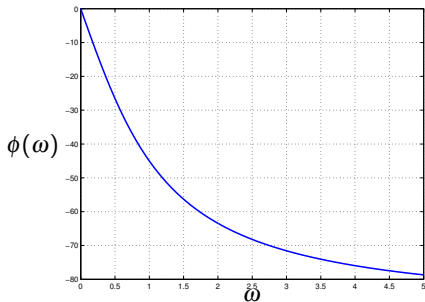
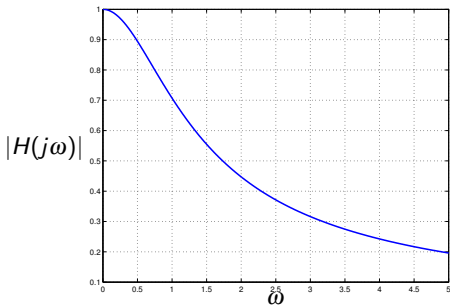
$$\begin{aligned}x(t) &= 5 \exp(j\phi) \exp(5t) \exp(3jt) + 5 \exp(-j\phi) \exp(5t) \exp(-3jt) \\ &= 10 \exp(5t) \left( \frac{\exp(j(3t + \phi)) + \exp(-j(3t + \phi))}{2} \right) \\ &= 10 \exp(5t) \cos(3t + \phi)\end{aligned}$$

**b)** Esboce o módulo  $M(\omega)$  e a fase  $\phi(\omega)$  da função de transferência abaixo para  $s = j\omega$ .

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

## Números complexos, módulo e fase

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}, \quad M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}, \quad \phi(\omega) = -\arctan(\omega)$$





c) Determine  $a$  para que os sinais  $x(t)$  e  $y(t)$  sejam ortogonais

$$x(t) = G_2(t-1) \quad , \quad y(t) = (t+a)G_2(t-1)$$

$$\int_0^2 x(t)y(t)dt = \int_0^2 (t+a)dt = 2 + 2a = 0 \quad \Rightarrow a = -1$$

c) Determine  $a$  para que os sinais  $x(t)$  e  $y(t)$  sejam ortogonais

$$x(t) = G_2(t-1) \quad , \quad y(t) = (t+a)G_2(t-1)$$

$$\int_0^2 x(t)y(t)dt = \int_0^2 (t+a)dt = 2 + 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

**d)** Expresse a função racional  $H(s)$  abaixo como uma soma de frações parciais

$$H(s) = \frac{5s^2 + 13s + 10}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{5s^2 + 13s + 10}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{4}{s+2}$$

**d)** Expresse a função racional  $H(s)$  abaixo como uma soma de frações parciais

$$H(s) = \frac{5s^2 + 13s + 10}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{5s^2 + 13s + 10}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{4}{s+2}$$

e) Considere a função de transferência abaixo com  $0 < \xi < 1/\sqrt{2}$ ,  $\omega_0 > 0$  e  $s = j\omega$

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2}$$

i) Determine o módulo de  $H(j\omega)$  para  $\omega = \omega_0$

ii) Determine a frequência  $\omega_r$  que maximiza  $M(\omega) = |H(j\omega)|$  e o valor de  $M(\omega_r)$

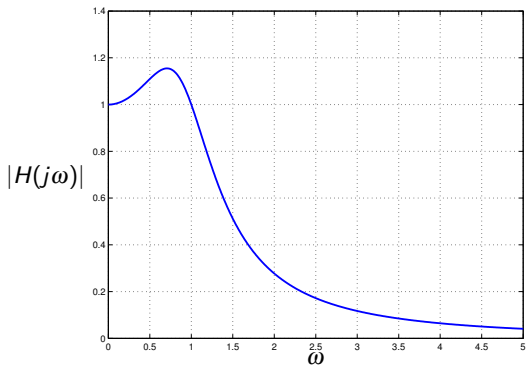
## Máximo do módulo

$$M(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2}}, \quad M(\omega_0) = \frac{1}{2\xi}$$

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Por exemplo, para

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}, \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad M(\omega_r) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



f) Considere o sistema descrito pela equação a diferenças

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

com  $x[n] = z^n$ .

Mostre que o módulo de  $y[n]$ , para  $z = \exp(j\omega)$ , é dado por

$$|y[n]| = |j \exp(-j\omega/2) \sin(\omega/2)| = |\sin(\omega/2)|$$

Esboce  $|y[n]|$  para  $\omega$  entre  $-\pi$  e  $+\pi$ .



## Módulo de número complexo

$$y[n] = \frac{(1 - z^{-1})z^n}{2}, \quad z = \exp(j\omega) \Rightarrow y[n] = \frac{(1 - \exp(-j\omega)) \exp(j\omega n)}{2}$$

$$= j \exp(-j\omega/2) \left( \frac{\exp(j\omega/2) - \exp(-j\omega/2)}{2j} \right) \exp(j\omega n)$$

$$= j \exp(-j\omega/2) \sin(\omega/2) \exp(j\omega n)$$

Módulo

$$|y[n]| = |\sin(\omega/2)|$$