1ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico não linear descrito por

$$\dot{v} = (v-1)(v+2) = v^2 + v - 2, \qquad v \in \mathbb{R}$$

b) Usando uma aproximação linear, determine o comportamento (local) em cada um dos pontos de equilíbrio

Pontos de equilíbrio: (1), $\quad(-2)$
Aproximação linear: $\dot{v} = [2v+1]v$

$$(1) : \dot{v} = [3]v \quad \text{(instável)}, \quad (-2) : \dot{v} = [-3]v \quad \text{(assint. estável)}$$

2ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema para $x = 0$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -v_1(v_2 - 1) + 3x^2 = -v_1 v_2 + v_1 + 3x^2 \\ \dot{v}_2 &= (v_1 + 1)v_2 - 2x = v_1 v_2 + v_2 - 2x \end{aligned}$$

$$(0,0), \ (-1,1)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx$$

$$A = \begin{bmatrix} -v_2 + 1 & -v_1 \\ v_2 & v_1 + 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6x \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(0,0): \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (-1,1): \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3ª Questão: Completando os retângulos em branco, determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$(p^3 - 4p^2 - 3p - 2)y(t) = (5p^3 - 12p^2 - 6p)x(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

4ª Questão: Considere o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} v$$

a) Determine $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, isto é, a transformada de Laplace de $y(t)$

b) Usando a transformada inversa de Laplace, determine $y(t)$

$$Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}v(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+7 & -5 \\ 4 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2(s+3)}{s^2 + 5s + 6} = \frac{2}{s+2}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = 2\exp(-2t)u(t)$$

5ª Questão: Determine a e b tais que

$$A^{-1} = a\mathrm{I} + bA, \quad A = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \Delta(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda+2)(\lambda+3), \quad a = -5/6, \quad b = -1/6$$

6ª Questão: Determine a forma de Jordan da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I} - A) = (\lambda - 2)^3$$

$$\mathrm{diag}(J_2(2), J_1(2)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7ª Questão: Determine a solução $v(t)$ para o sistema

$$\dot{v} = Av = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} \exp(-t) - t\exp(-t) \\ t\exp(-t) \end{bmatrix}$$

8ª Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Determine uma matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad Q_{geral} = \begin{bmatrix} a & c \\ -a/2 & (a-2c)/4 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \ , \ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função
$y(t) = 5t^2\cos(2t)$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

10ª Questão: Determine a resposta ao impulso $h(t)$, $t \geq 0$ (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -7 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 17 \end{bmatrix} v$$

$$H(s) = \frac{s+17}{s^2+7s+10} = \frac{5}{s+2} - \frac{4}{s+5}, \quad h(t) = \big(5\exp(-2t) - 4\exp(-5t)\big)u(t)$$