Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1ª Questão: Considerando o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial abaixo, determine a solução forçada para a entrada $x(t) = 1 + \cos(t)$.

$$\ddot{y} + 2y = \ddot{x} + 4x$$

2ª Questão: Determine a transformada de Laplace (bilateral) com o domínio de existência Ω_x para

$$x(t) = -t^2 \exp(-3t)u(-t)$$

3ª Questão: Determine $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ (transformada de Laplace bilateral inversa) para

$$X(s) = \frac{s^2 + 6s + 6}{(s+2)^2(s+1)}, \quad -2 < \mathrm{Re}(s) < -1$$

4ª Questão: a) Determine a transformada unilateral de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, sendo $y(t)$ a solução da equação diferencial abaixo

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 13y = 0, \quad y(0),\ \dot{y}(0) \text{ dados}$$

b) Determine $y(0)$ e $\dot{y}(0)$ para que $y(t) = 2\exp(-2t)\big(\cos(3t) + \operatorname{sen}(3t)\big)u(t)$ seja a solução.

5ª Questão: Determine a resposta à rampa $y_r(t)$ (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 8y = 10\ddot{x} + 8\dot{x} + 16x$$

6ª Questão: Considere $y(t)$ a saída de um sistema linear invariante no tempo, BIBO-estável e causal, cuja transformada unilateral de Laplace é dada por

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{8s^2 + 44s + 65}{s^3 + 4s^2 + 13s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

Determine, se existir:
a) O valor inicial de $y(t)$;
b) O valor final de $y(t)$

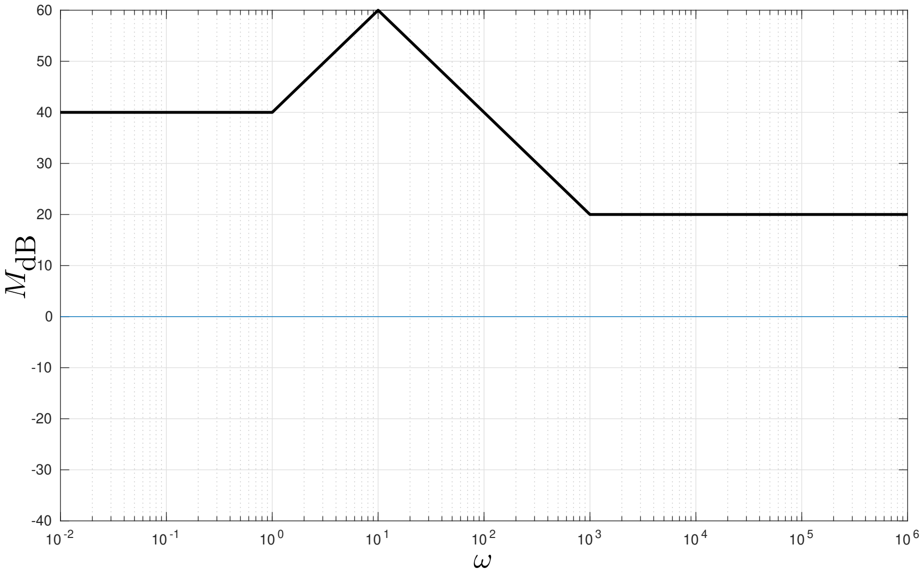
7ª Questão: Determine a solução forçada quando a entrada é dada por $x(t) = 8\exp(-t)$ para o sistema linear invariante no tempo causal cuja função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

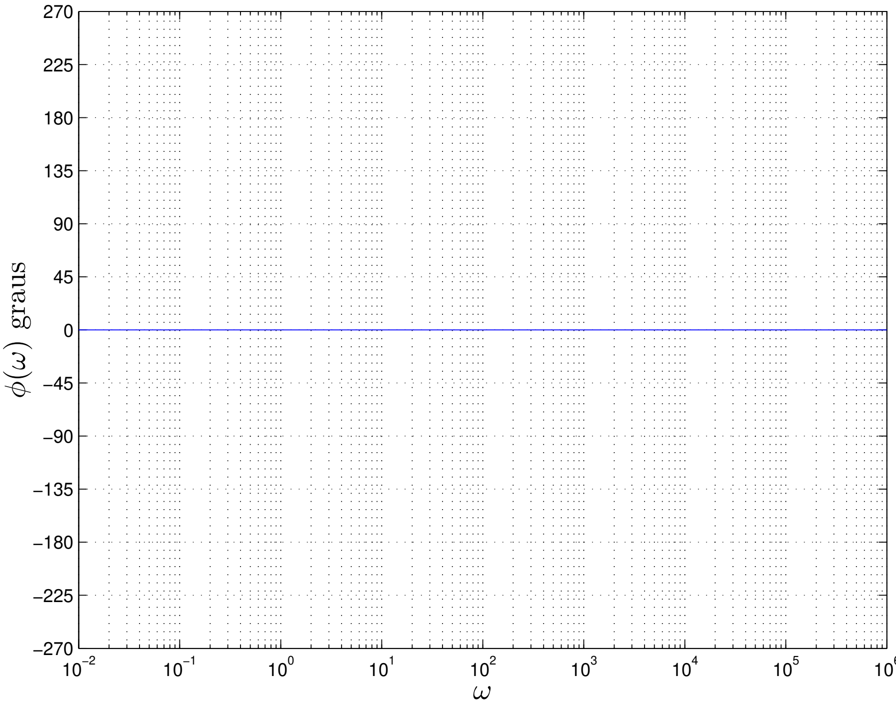
8ª Questão: Determine a solução $y(t)$ da equação diferencial

$$p(p-1)y = 10t, \quad y(0) = 5, \quad \dot{y}(0) = 10$$

9ª Questão: Considere as assíntotas de módulo do diagrama de Bode em escala logarítmica da função de transferência de um sistema linear invariante no tempo de fase mínima da figura abaixo.



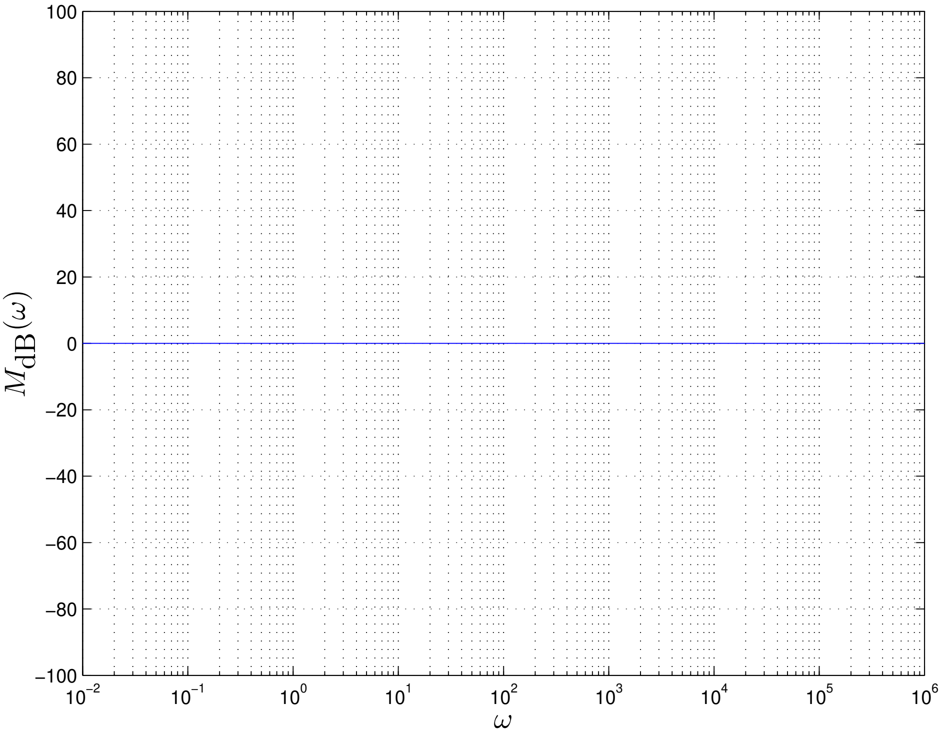
a) Esboce as assíntotas de fase (em graus)



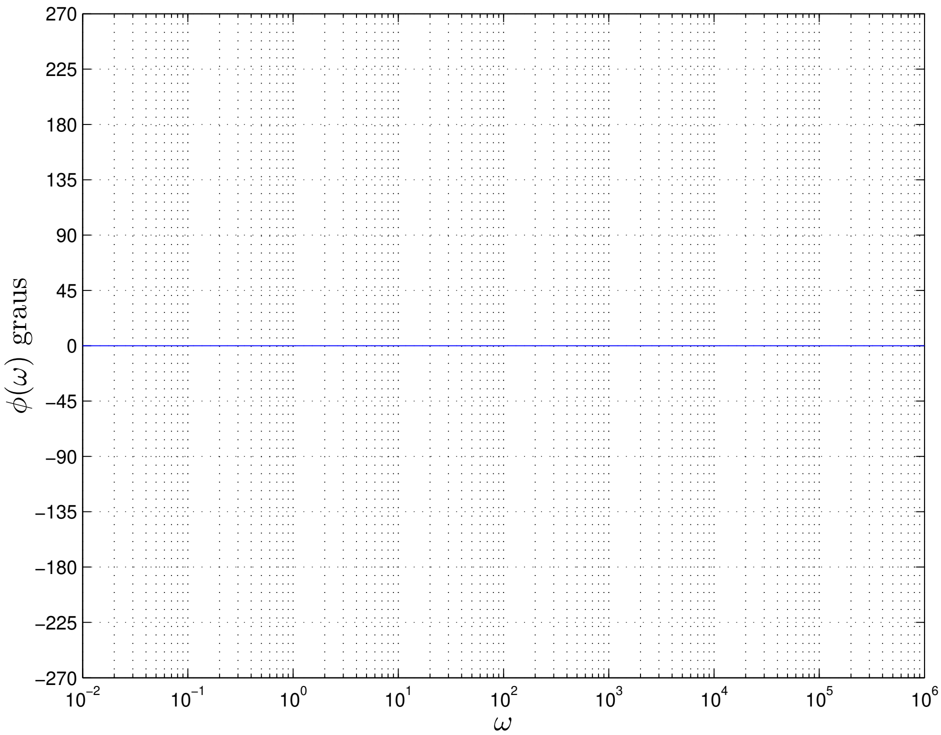
b) Baseando-se nos diagramas assintóticos de módulo e fase, determine a solução forçada do sistema para a entrada $x(t) = 10\cos(100t)$

10ª Questão: a) Esboce as assíntotas do módulo (diagrama de Bode em escala logarítmica) do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{10^4 s}{(s+100)(s+1000)}$$



b) Esboce as assíntotas da fase (diagrama de Bode em graus) do sistema.



$$u(t) \text{ (função degrau)}, \quad \delta(t) \text{ (função impulso)}, \quad \delta(t) = \frac{d}{dt}u(t), \quad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\beta)d\beta$$

$$G_T(t) = u(t+T/2) - u(t-T/2), \quad \mathrm{Tri}_{2T}(t) = (t/T+1)G_T(t+T/2) + (-t/T+1)G_T(t-T/2)$$

Transformada de Laplace (bilateral):

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(-st)dt \quad , \quad s \in \Omega_h \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = X(s)\Big|_{s=0, \ \ 0\in\Omega_x}$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \ s \in \mathbb{C} \quad , \quad \mathcal{L}\{x(t) = x_1(t) * x_2(t)\} = \mathcal{L}\{x_1(t)\}\mathcal{L}\{x_2(t)\} \quad , \quad \Omega_x = \Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$$

$$\mathcal{L}\{y(t) = x(t-\tau)\} = X(s)\exp(-s\tau) \quad , \quad \Omega_y = \Omega_x \quad , \quad \mathcal{L}\{\exp(-at)u(t)\} = \frac{1}{s+a} \quad , \quad \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\exp(-\alpha t)\cos(\beta t)u(t)\} = \frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \ , \mathcal{L}\{\exp(-\alpha t)\mathrm{sen}(\beta t)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \ , \ \mathrm{Re}(s+\alpha) > 0$$

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{t^m}{m!}\exp(-at)u(t)\Big\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}} \ , \ \ \mathrm{Re}(s+a) > 0 \ , \ m \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\Big\{y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\beta)u(\beta)d\beta\Big\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{x(t)\} \quad , \quad \Omega_y \supset \Omega_x \cap \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 0\}$$

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{t^m}{m!}u(t)\Big\} = \frac{1}{s^{m+1}} \ , \ \ \mathrm{Re}(s) > 0 \ , \ m \in \mathbb{N} \quad , \quad \mathcal{L}\{x(-t)\} = X(-s) \quad , \quad -s \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\{y(t) = \exp(-at)x(t)\} = X(s+a) \quad ; \quad \Omega_y = (s+a) \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\{y(t) = t^m x(t)\} = (-1)^m \frac{d^m X(s)}{ds^m} \quad , \quad \Omega_y = \Omega_x \ , \ m \in \mathbb{N} \quad , \quad \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) \quad , \quad \Omega_{\dot{x}} \supset \Omega_x$$

Transformada de Laplace (unilateral):

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0}^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt, \qquad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \ \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0), \quad \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - \dot{x}(0), \quad s \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\left\{x^{(m)}(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right\} = s^m\mathcal{L}\{x(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1}x^{(k)}(0)$$

$$x(0^+) = \lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to+\infty} sX(s) \ , \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

Coeficientes a determinar (equações diferenciais): $py(t) \triangleq \dfrac{d}{dt}y(t)$

$$D(p)y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(t), \qquad f_k(t) \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\exp(\lambda t)$, $t\exp(\lambda t)$, $\ldots$, $t^{r-1}\exp(\lambda t)$ são modos próprios.

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad , \quad \text{se} \quad \bar{D}(p)x(t) = 0 \text{ então } \quad \bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$$

$$\text{Solução forçada:} \quad y(t) = y_h(t) + y_f(t) \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f(t) = N(p)x(t) \ , \ D(p)y_h(t) = 0$$

$$y_f(t) = \sum_{k=1}^{m} b_k g_k(t), \qquad g_k(t) \text{ modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)}$$

Resposta em Frequência: $H(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(-st)dt \quad , \quad H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$

Diagramas assintóticos de Bode: gráficos do módulo (em dB) e da fase (em graus) versus a frequência em escala logarítmica.

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20\log M(\omega) \quad \text{(sendo log o logaritmo na base 10)}$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad \Rightarrow \quad M_{\text{dB}}(\omega) = M_{1\text{dB}}(\omega) + M_{2\text{dB}}(\omega) \quad ; \quad \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

ω_c (frequência de corte): encontro das assíntotas de baixa e alta frequência

Pólos complexos: $0 < \xi < 1$, $\omega_n > 0$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^* = \lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\text{pico } (0 < \xi < 1/\sqrt{2}): \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad ; \quad M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$