1ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{z^2 - 13z}{(z+2)(z-3)}, \quad 2 < |z| < 3$$

$$X(z) = \frac{z^2 - 13z}{(z+2)(z-3)} = X(z) = \frac{3z}{z+2} - \frac{2z}{z-3}, \quad x[n] = 3(-2)^n u[n] + 2(3)^n u[-n-1]$$

2ª Questão: Determine o valor da soma $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \big(n2^{-n} + 4^{-n}\big)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \big(n2^{-n} + 4^{-n}\big) = \mathcal{Z}\Big\{\big(n2^{-n} + 4^{-n}\big)u[n]\Big\}\Big|_{z=1} = \left(\frac{0.5z}{(z-0.5)^2} + \frac{z}{z-0.25}\right)\Big|_{z=1} = \frac{10}{3}$$

3ª Questão: Determine, para as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias discretas independentes $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ cujas transformadas Z são dadas respectivamente por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{-4}{z-5}, \ |z| < 5, \quad \mathcal{E}\{z^{\mathbb{Y}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{Y} = k\} = \frac{-3}{2z-5}, \ |z| < 5/2$$

a) A transformada Z da distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta $\mathbb{W} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{W}}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\}\mathcal{E}\{z^{\mathbb{Y}}\} = \frac{12}{(z-5)(2z-5)} = \frac{12}{2z^2 - 15z + 25}, \ |z| < 5/2$$

b) $\Pr\{\mathbb{W} = 0\} = 12/25$

c) $\displaystyle \mathcal{E}\{\mathbb{W}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{W} = k\} = \left(z\frac{d}{dz}\right)\frac{12}{2z^2 - 15z + 25}\Big|_{z=1} = \frac{-12(4z-15)}{(2z^2 - 15z + 25)^2} = \frac{11}{12}$

4ª Questão: a) Determine $Y(z)$, isto é, a transformada Z da solução (causal) $y[n]$ da equação a diferenças $y[n+2] + y[n+1] - 2y[n] = 0$ em termos de $y[0]$ e $y[1]$.
b) Determine a solução $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ para $y[0] = 1, y[1] = 4$

$$Y(z) = \frac{z^2 y[0] + z(y[0] + y[1])}{(z-1)(z+2)}, |z| > 2 \quad y[n] = \big(2 - (-2)^n\big)u[n]$$

5ª Questão: a) Determine a solução forçada $y_f[n]$ da equação a diferenças

$$(p-2)(p-4)y[n] = (p^2 - 6p + 8)y[n] = y[n+2] - 6y[n+1] + 8y[n] = 2^{n+3}$$

b) Determine a solução para $y[0] = 1, \ y[1] = 10$

$$y_f[n] = -2n(2)^n, \quad y[n] = -2n(2)^n - 5(2)^n + 6(4)^n$$

6ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema para $x = 0$

$$\dot{v}_1 = -2(v_1 + 2)v_2 - 5x = -2v_1v_2 - 4v_2 - 5x$$
$$\dot{v}_2 = 5(v_2 + 3)v_1 + x = 5v_1v_2 + 15v_1 + x$$

$$(0,0), \ (-2,-3)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx$$

$$A = \begin{bmatrix} -2v_2 & -2v_1 - 4 \\ 5v_2 + 15 & 5v_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(0,0) : A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}, \quad (-2,-3) : A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

7ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\dddot{y} - 4\ddot{y} + 6\dot{y} - 5y = 2\dddot{x} - 10\ddot{x} + 15\dot{x} - 9x$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

8ª Questão: Determine $y(t)$ para o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} v$$

$$Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1} v(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+4 & 4 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{4s+18}{s^2+4s+4} = \frac{10}{(s+2)^2} + \frac{4}{s+2}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \big(10t\exp(-2t) + 4\exp(-2t)\big)u(t)$$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \ , \ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função
$y(t) = t\cos(3t) + 2t \ \mathrm{sen}(3t)$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

10ª Questão: Determine a forma de Jordan da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I} - A) = \lambda^3$$

$$\mathrm{diag}(J_2(0), J_1(0)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$