1) Considerando o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial abaixo, determine a solução forçada para a entrada $x(t) = 1 + \exp(2t) + \operatorname{sen}(5t)$.

$$\ddot{y} + 3y = \ddot{x} + 6x$$

$$H(s) = \frac{s^2+6}{s^2+3}, \quad y_f(t) = H(0)1 + H(2)\exp(2t) + H(j5)\text{sen}(5t) = 2 + \frac{10}{7}\exp(2t) + \frac{19}{22}\,\text{sen}(5t)$$

2) Determine a transformada de Laplace (bilateral) com o domínio de existência Ω_x para

$$x(t) = \big(-t^3\exp(2t) + t\exp(-3t)\big)u(-t)$$

$$y(t) = x(-t) = \big(t^3\exp(-2t) - t\exp(3t)\big)u(t), \quad Y(s) = \frac{6}{(s+2)^4} - \frac{1}{(s-3)^2}, \quad \text{Re}(s) > 3$$

$$X(s) = Y(-s) = \frac{6}{(-s+2)^4} - \frac{1}{(-s-3)^2} = \frac{6}{(s-2)^4} - \frac{1}{(s+3)^2}, \quad \text{Re}(s) < -3$$

3) Determine $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ (transformada de Laplace bilateral inversa) para

$$X(s) = \frac{2s+10}{(s-1)(s-5)}, \quad 1 < \text{Re}(s) < 5$$

$$X(s) = \frac{2s+10}{(s-1)(s-5)} = \frac{-3}{s-1} + \frac{5}{s-5}$$

$$x(t) = -3\exp(t)u(t) - 5\exp(5t)u(-t)$$

4) a) Determine a transformada unilateral de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, sendo $y(t)$ a solução da equação diferencial abaixo

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 13y = 0, \quad y(0),\ \dot{y}(0)\ \text{dados}$$

b) Determine $y(0)$ e $\dot{y}(0)$ para que $y(t) = 5\exp(-3t)\ \text{sen}(2t)u(t)$ seja a solução.

$$Y(s) = \frac{sy(0) + \dot{y}(0) + 6y(0)}{s^2+6s+13} = \frac{5(2)}{(s+1)^2+2^2}, \quad y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 10$$

5) Determine a resposta ao degrau $y_u(t)$ (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 10y = 5\ddot{x} + 17\dot{x} + 30x$$

$$H(s) = \frac{5s^2+17s+30}{s^2+2s+10}, \quad X(s) = 1/s$$

$$Y_r(s) = \left(\frac{5s^2+17s+30}{s^2+2s+10}\right)\frac{1}{s} = \frac{3}{s} + \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+9} + \frac{3(3)}{(s+1)^2+9}$$

$$y_u(t) = \big(3 + 2\exp(-t)\cos(3t) + 3\exp(-t)\ \text{sen}(3t)\big)u(t)$$

6) Considere $y(t)$ a saída de um sistema linear invariante no tempo, BIBO-estável e causal, cuja transformada unilateral de Laplace é dada por

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{7s^2+14s+20}{s^3+2s^2+2s}, \quad \text{Re}(s) > 0$$

Determine, se existir: a) O valor inicial de $y(t)$; b) O valor final de $y(t)$

$$y(0^+) = \lim_{s\to+\infty} sY(s) = 7, \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = 10$$

7) Determine a solução forçada quando a entrada é dada por $x(t) = 2\exp(-t) - 5\exp(-2t)$ para o sistema linear invariante no tempo causal cuja função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

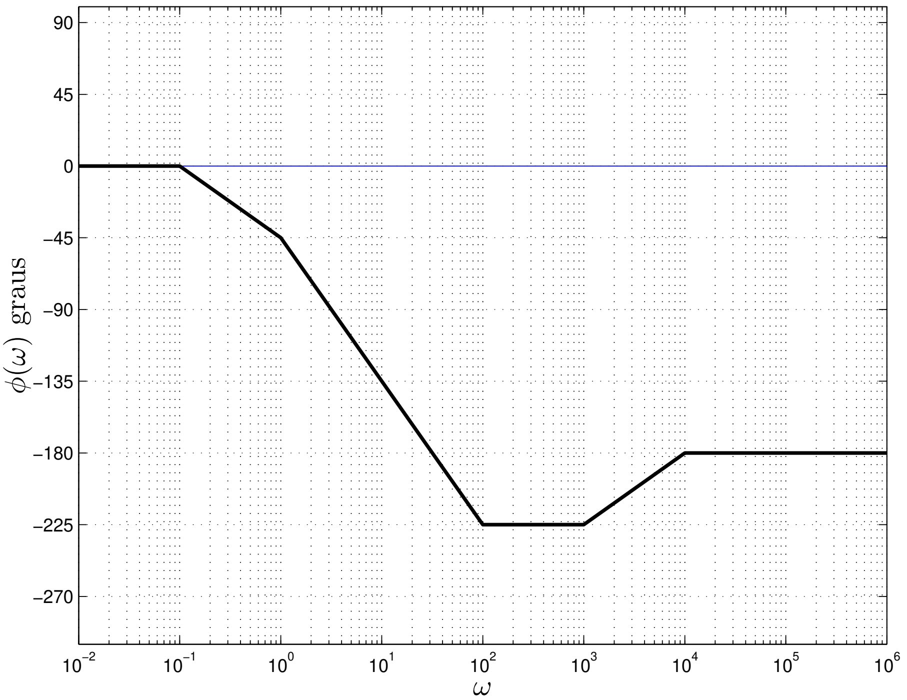
$$(p+1)(p+2)y = (p^2+3p+2)y = 2\exp(-t) - 5\exp(-2t), \quad \bar{D}(p) = (p+1)(p+2)$$
$$y_f(t) = b_1 t\exp(-t) + b_2 t\exp(-2t), \; b_1 = 2, \; b_2 = 5$$

8) Determine a solução $y(t)$ da equação diferencial

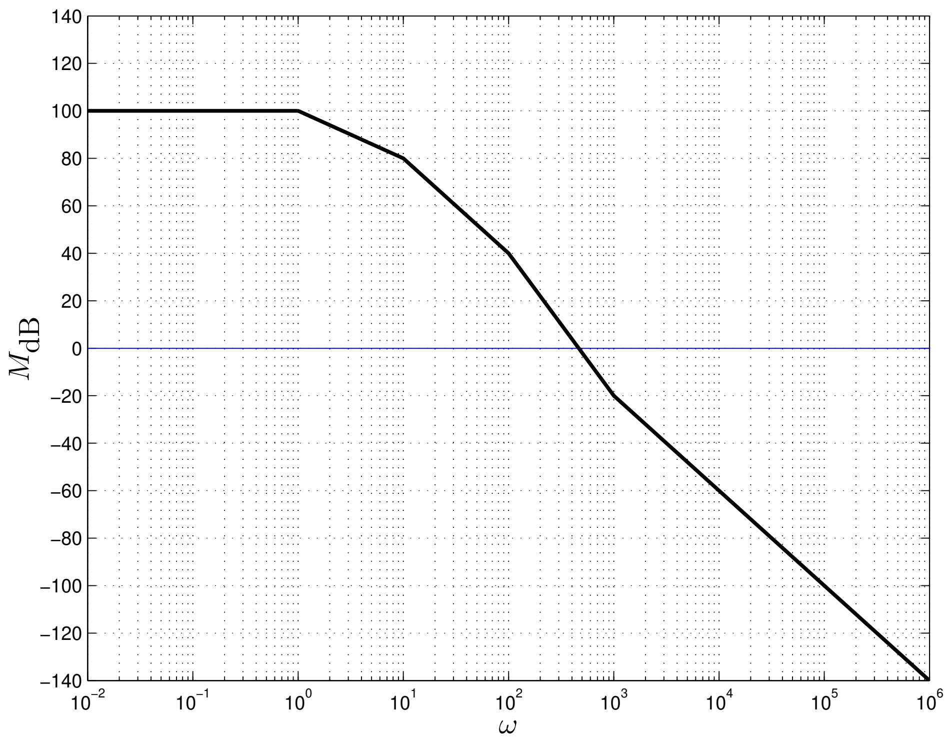
$$p(p+2)y = 4t, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 5$$

$$y(t) = t^2 - t + 3 - 3\exp(-2t)$$

9) Considere as assíntotas da fase do diagrama de Bode em escala logarítmica da função de transferência de um sistema linear invariante no tempo de fase mínima da figura abaixo.



a) Sabendo que o ganho DC é 100 dB, esboce as assíntotas do módulo (em dB)

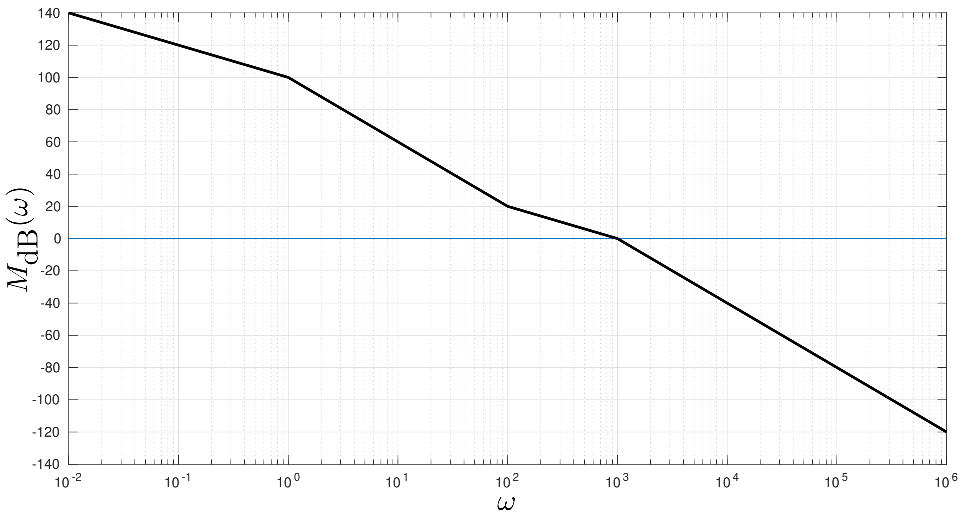


b) Baseando-se nos diagramas assintóticos de módulo e fase, determine a solução forçada do sistema para a entrada $x(t) = 5 + \cos(10t)$

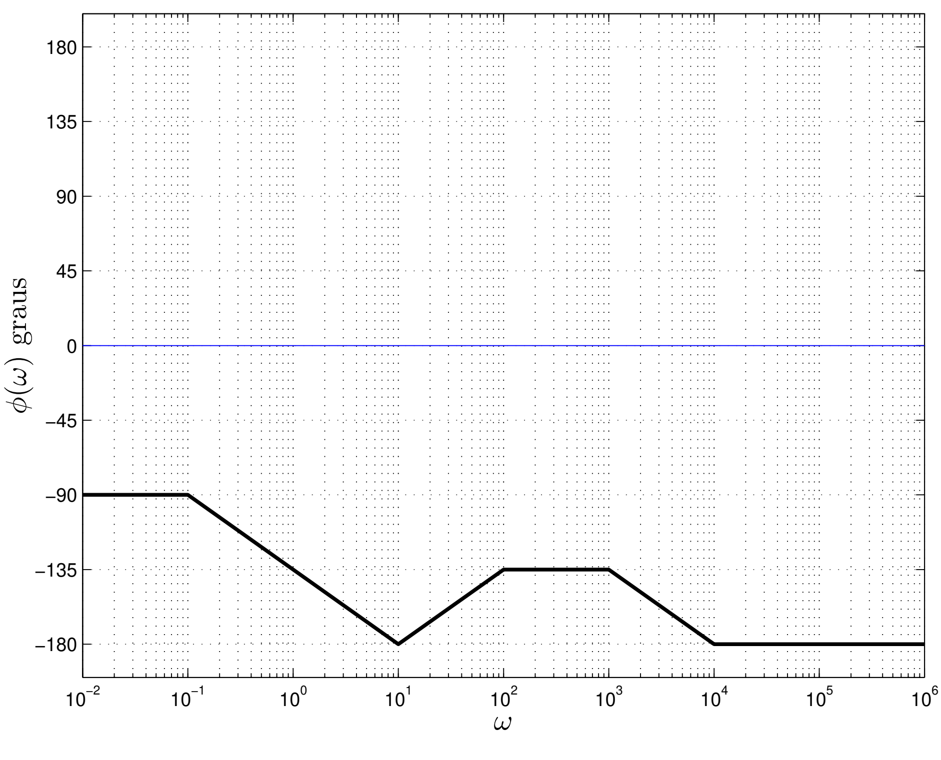
$$y_f(t) = 5 \times 10^5 + 10^4 \cos(10t - 135^o)$$

10) a) Esboce as assíntotas do módulo (diagrama de Bode em escala logarítmica) do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{10^6(s+100)}{s(s+1)(s+1000)}$$



b) Esboce as assíntotas da fase (diagrama de Bode em graus) do sistema.



11) Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{7z^3 - 13z^2 + z}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2} = \frac{7z^3 - 13z^2 + z}{(z-1)^2(z-2)}, \quad 1 < |z| < 2$$

$$X(z) = \frac{5z}{(z-1)^2} + \frac{4z}{z-1} + \frac{3z}{z-2}, \quad 1 < |z| < 2$$

$$\Rightarrow x[n] = (5n(1)^{n-1} + 4(1)^n)u[n] - 3(2)^n u[-n-1]$$

12) Determine o valor da soma $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 4^{-n})$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 4^{-n}) = \mathcal{Z}\Big\{n^2 4^{-n} u[n]\Big\}\Big|_{z=1} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^2 \mathcal{Z}\Big\{4^{-n}u[n]\Big\}\Big|_{z=1} = \frac{(1/4)^2 z + (1/4)z^2}{(z-1/4)^3}\Big|_{z=1} = \frac{20}{27}$$

13) As transformadas Z das distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias discretas independentes $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são dadas respectivamente por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{-5z+9}{4z^2 - 18z + 18} = \frac{-5z+9}{(4z-6)(z-3)}, \ |z| < 3/2$$

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{Y}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{Y} = k\} = \frac{1}{2-z}, \ |z| < 2$$

Determine:
a) A transformada Z da distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta $\mathbb{W} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{W}}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\}\mathcal{E}\{z^{\mathbb{Y}}\} = \frac{5z-9}{(4z-6)(z-3)(2-z)} = \frac{-5z+9}{4z^3 - 26z^2 + 54z - 36}, \ |z| < 3/2$$

b) $\Pr\{\mathbb{W} = 0\} = 1/4$ c) $\Pr\{\mathbb{W} = 1\} = 17/72$ d) $\mathcal{E}\{\mathbb{W}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{W} = k\} = 9/4$

14) a) Determine $Y(z)$, isto é, a transformada Z da solução da equação a diferenças abaixo

$$(p^2 + 2p - 3)y[n] = y[n+2] + 2y[n+1] - 3y[n] = 0, \qquad y[0] = 4, \ y[1] = 12$$

b) Determine a solução $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$

$$Y(z) = \frac{4z^2 + 20z}{(z-1)(z+3)}, \quad y[n] = \big(6(1)^n - 2(-3)^n\big)u[n]$$

15) a) Determine a solução forçada $y_f[n]$ da equação a diferenças

$$\underbrace{(p^2 + 5p + 6)}_{(p+2)(p+3)} y[n] = y[n+2] + 5y[n+1] + 6y[n] = -10(-2)^n + 9(-3)^n$$

b) Determine a solução para $y[0] = 8, \ y[1] = -40$

$$y_f[n] = 5n(-2)^n + 3n(-3)^n, \quad y[n] = 3(-2)^n + 5(-3)^n + 5n(-2)^n + 3n(-3)^n$$

16) a) Determine os pontos de equilíbrio para $x = 0$ do sistema dinâmico não linear descrito por

$$\dot{v} = v(v^2 - 4) + 3x^2$$

b) Avalie o comportamento (estável, assintoticamente estável ou instável) em torno de cada ponto de equilíbrio usando uma aproximação linear

Pontos de equilíbrio: $(\bar{v} = 0),\ (\bar{v} = 2),\ (\bar{v} = -2)$

Aproximação linear: $\dot{v} = \left[3v^2 - 4\right] v$

$$(\bar{v} = 0) : \dot{v} = -4v \text{ (assint. estável)}, \quad (\bar{v} = \pm 2) : \dot{v} = 2v \text{ (instável)}$$

17) Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 10\dddot{x} + 9\ddot{x} + 8\dot{x} + 6x$$

$$(p^3 + 3p^2 + 4p + 5)y(t) = (10p^3 + 9p^2 + 8p + 6)x(t),\ p = \frac{d}{dt}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -44 & -32 & -21 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}$$

18) Determine $y(t)$ para o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} v$$

$$Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}v(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & -4 \\ 5 & s-7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2(s-3)}{s^2 - 5s + 6} = \frac{2}{s-2}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = 2\exp(2t)u(t)$$

19) Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}\ ,\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0\ ,\ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função $y(t) = 3t^2 \exp(-2t)\cos(t)$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

20) Determine a forma de Jordan da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I} - A) = (\lambda - 6)^3$$

$$\{J_2(6), J_1(6)\} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

21) Defina observabilidade e controlabilidade para sistemas lineares invariantes no tempo.

SLIT são controláveis se, para qualquer estado inicial $v(0)$ e um estado $v(\tau)$ final arbitrário, existir uma entrada $x(t)$, $t \in [0,\tau]$ que leve o sistema de $v(0)$ a $v(\tau)$ em tempo finito τ.

SLIT são observáveis se existir $\tau > 0$ tal que o conhecimento da saída $y(t)$ para todo $t \in [0,\tau]$ é suficiente para determinar a condição inicial $v(0)$.

22) Determine os autovalores associados aos modos observáveis e não observáveis, controláveis e não controláveis (justifique) para o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} v, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 5)$$

Autovalores: 2 (não observável e não controlável) e 5 (controlável e observável), pois

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \ \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \text{ (não observ.)}, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = 1 \text{ (não contr.)}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \ \text{rank} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \text{ (observ.)}, \text{rank} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 2 \text{ (contr.)}$$

23) O sistema linear invariante no tempo dado abaixo: a) é controlável? b) é observável? Justifique a resposta.

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

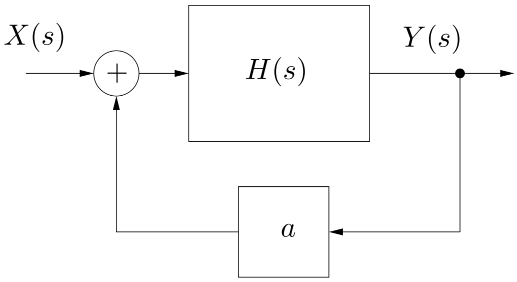
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} v$$

Não é controlável, pois embora só exista um bloco de Jordan por autovalor, há elementos de b correspondentes à última linha de cada bloco iguais zero (autovalor 1)
Não é observável, pois embora só exista um bloco de Jordan por autovalor, há elementos de c correspondentes à primeira coluna de cada bloco iguais zero (autovalor 2)

24) Para o sistema linear invariante no tempo abaixo, determine os valores de a e b (reais) para que o sistema seja controlável e os valores de c e d (reais) para que o sistema seja observável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} v$$

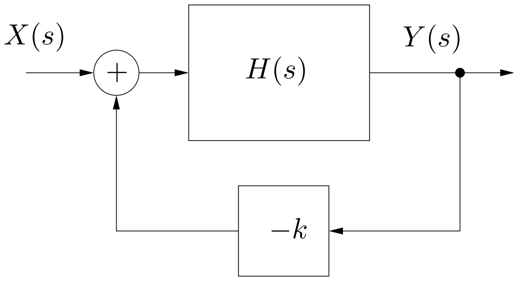
$$a \neq b \neq 0, \quad a \neq 2b \neq 0, \qquad c \neq -d \neq 0, \quad 2c \neq -d \neq 0$$



25) Determine a sensibilidade do ganho DC ($s = 0$) do sistema em malha fechada em função do parâmetro a, para $a = 1$

$$H(s) = \frac{2s + a}{s^2 - 4as - 3a}$$

$$G(s) = \frac{2s + a}{s^2 - 6as - 3a - a^2} \ , \ \frac{\partial G}{\partial a}\frac{a}{G} = \frac{a(13s^2 + 6s + 4as + a^2)}{(2s + a)(s^2 - 6as - 3a - a^2)}\Big|_{s=0} = \frac{-a}{a+3}\Big|_{a=1} = -1/4$$



26) Determine o intervalo para k tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{s^2 + s}{s^3 - s + 6}$$

$$D(s) = s^3 + ks^2 + (k - 1)s + 6 \quad , \quad 3 < k$$

27) Determine se o sistema linear invariante no tempo dado abaixo é estável, assintoticamente estável ou instável. Justifique.

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} v$$

Estável, pois possui autovalores de parte real nula mas não existem blocos modais de Jordan de tamanho maior do que um

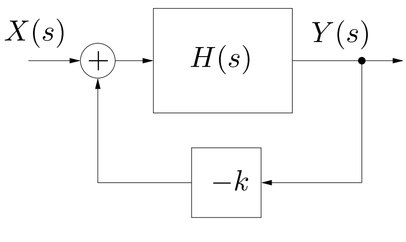
28) Conclua (com justificativa) sobre a estabilidade assintótica do sistema linear invariante no tempo $\dot{v} = Av$ resolvendo a equação de Lyapunov $A'P + PA + Q = 0$ (A' é o transposto de A) para

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 26 & 12 \\ 12 & 20 \end{bmatrix} > 0$$

Assintoticamente estável, pois a solução

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$$

é única, simétrica e definida positiva.



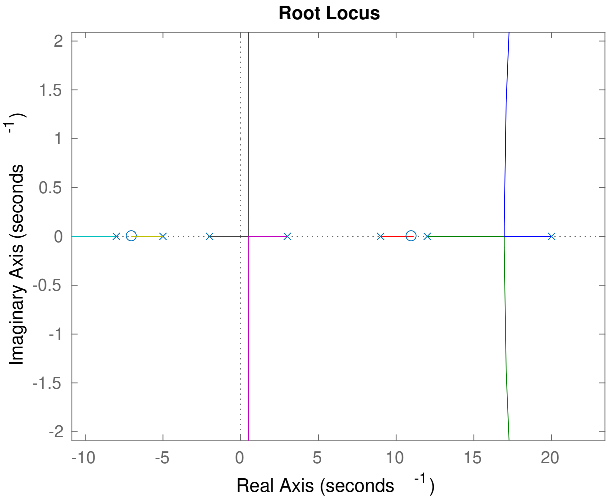
29) Considere o sistema realimentado mostrado na figura com

$$H(s) = \frac{(s + 7)(s - 11)}{(s + 2)(s + 5)(s + 8)(s - 3)(s - 9)(s - 12)(s - 20)}$$

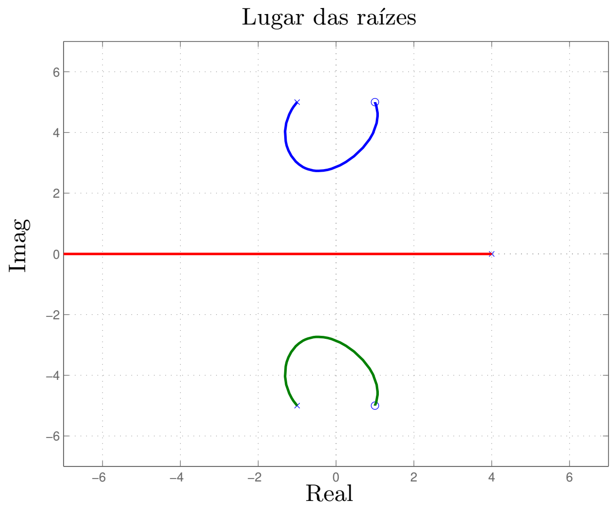
Esboce o lugar das raízes para o sistema realimentado (eixo real e assíntotas), determinando o ponto de encontro das assíntotas

$$\pi/5, \frac{2\pi}{5}, \pi, -\frac{\pi}{5}, -\frac{2\pi}{5}, \quad (-2-5-8+3+9+12+20-(-7+11))/5 = 5$$

Eixo real (ver abaixo):



30) No lugar de raízes mostrado na figura, com polos em 4 e $-1 \pm 5j$ e zeros em $1 \pm 5j$, considerando que os cruzamentos com o eixo imaginário ocorrem em 0 e $\pm j3$, determine o intervalo para o ganho k que garante a estabilidade do sistema em malha fechada.



Ponto 0: $k = (4)(\sqrt{26})(\sqrt{26})/(\sqrt{26})(\sqrt{26}) = 4$

Pontos $\pm j3$: $k = \sqrt{25} = 5$

$4 < k < 5$