Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

$1^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine: a) A função de transferência do sistema

$$y[n+1] + 3y[n] = x[n]$$

b) A solução forçada para a entrada $x[n] = -2j + (-j)^n$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

$2^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{z^2 + 23z}{(z-2)(z+3)}, \quad 2 < |z| < 3$$

$3^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine o valor da soma $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)3^{-(n+1)}$

$4^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine, para as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias discretas independentes $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ cujas transformadas Z são dadas respectivamente por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{-z}{z-2},\ |z| < 2, \quad \mathcal{E}\{z^{\mathbb{Y}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{Y} = k\} = \frac{-5}{2z-7},\ |z| < 7/2$$

a) A transformada Z da distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta $\mathbb{W} = \mathbb{X} + 2\mathbb{Y}$

b) $\Pr\{\mathbb{W} = 1\}$

c) $\mathcal{E}\{\mathbb{W}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{W} = k\}$

$5^{\underline{a}}$ **Questão:** a) Determine $H(z)$, isto é, a transformada Z da resposta ao impulso (causal) $h[n]$ do sistema descrito pela equação a diferenças

$$y[n+2] - y[n] = -3x[n+1] + x[n]$$

b) Determine $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ (condições iniciais nulas)

$6^{\underline{a}}$ **Questão:** a) Determine $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]u[n]\}$, isto é, a transformada Z da sequência $y[n]u[n]$ solução para $n \geq 0$ da equação a diferenças

$$y[n+2] - 2y[n+1] - 8y[n] = 0, \quad y[0] = -2,\ y[1] = 22$$

b) Determine $y[n]$

$7^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine a solução forçada para

$$y[n+1] - y[n] = 6n + 8$$

8ª Questão: Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem como solução a sequência

$$y[n] = n(-1)^n + n^2(-1)^n$$

9ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema abaixo para $x = 0$

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= -(v_1 + 2)(v_2 + 2) - x\\ \dot{v}_2 &= (v_1 + 1)(v_2 + 1) + 2x\end{aligned}$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx, \quad v \in \mathbb{R}^2$$

10ª Questão: Completando os valores nos quadrados em branco, determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\dddot{y} + 7\ddot{y} - 5\dot{y} - 3y = 3\dddot{x} + 27\ddot{x} - 20\dot{x} - 11x$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \square \\ 1 & 0 & \square \\ 0 & 1 & \square \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} \square \end{bmatrix}$$

Transformada Z: $\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \dfrac{z}{z-a}$, $|z| > |a|$, $\mathcal{Z}\{-a^n u[-n-1]\} = \dfrac{z}{z-a}$, $|z| < |a|$

$$\mathcal{Z}\{na^{n-1}u[n]\} = \frac{z}{(z-a)^2} \ , \ |z| > |a| \quad , \quad \mathcal{Z}\{-na^{n-1}u[-n]\} = \frac{z}{(z-a)^2} \ , \ |z| < |a|$$

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z), z \in \Omega_x \ \Leftrightarrow \ \mathcal{Z}\{x[-n]\} = X(z^{-1}), z^{-1} \in \Omega_x \quad , \quad \mathcal{Z}\{x_1[n] * x_2[n]\} = \mathcal{Z}\{x_1[n]\}\mathcal{Z}\{x_2[n]\}$$

$$\mathcal{Z}\{n^m x[n]\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^m X(z) \quad , \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^m x[k] = \mathcal{Z}\{n^m x[n]\}\Big|_{z=1} \ , \ 1 \in \Omega_x \ , \ m \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{Z}\{y[n] = x[n-m]u[n-m]\} = z^{-m}\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+ \ , \ \Omega_y = \Omega_x$$

$$\mathcal{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m\Big(\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\Big) \ , \ m \in \mathbb{Z}_+$$

$$\mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} a^{n-m}u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}} \ , \ |z| > |a| \ , \ m \in \mathbb{N} \quad , \quad \mathcal{Z}\{n^2 a^n u[n]\} = \frac{az^2 + a^2 z}{(z-a)^3} \ , \ |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix} a^{n}u[n]\right\} = (1 - az^{-1})^{-(m+1)} = \frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}} \ , \ m \in \mathbb{N} \ , \ |z| > |a|$$

$x[0] = \lim\limits_{|z| \to +\infty} X(z)$, Ω_x exterior de um círculo , $x[+\infty] = \lim\limits_{z \to 1}(z-1)X(z)$, $|z| > \rho$, $0 < \rho \leq 1$

Transformada Z e Probabilidade:

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \mathcal{Z}\{p[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k]z^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pr\{\mathbb{X} = k\}z^k, \quad G_{\mathbb{X}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}G_{\mathbb{X}}(z)\Big|_{z=0} z^n$$

$$\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k kp[k] \ , \quad \sigma^2_{\mathbb{X}} = \mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} - \mathcal{E}\{\mathbb{X}\}^2 \ , \quad \mathcal{E}\{\mathbb{X}^m\} = \left(\frac{zd}{dz}\right)^m \mathcal{Z}\{p[n]\}\Big|_{z=1}$$

$\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ var. aleatórias independentes $\Rightarrow$ $\mathcal{E}\{z^{(\mathbb{X}+\mathbb{Y})}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\}\mathcal{E}\{z^{\mathbb{Y}}\}$

Variáveis de estado: $\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t)$, $y(t) = g(v(t), x(t), t)$

Pontos de equilíbrio: $\bar{v}$ tais que $f(\bar{v}, \bar{x}) = 0$, $\bar{x} =$cte. Sistema linear (em torno dos pontos de equilíbrio)

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \ , \ B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \ , \ C = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \ , \ D = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}}$$

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}{p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0} + \beta_3, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ c = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{v} = Av + bx \ , \ y = cv + dx \ , \ \frac{N(p)}{D(p)} = c(p\mathrm{I} - A)^{-1}b + d = b'(p\mathrm{I} - A')^{-1}c' + d, \quad p = \frac{d}{dt}$$

$$v = T\hat{v} \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = T^{-1}AT, \ \hat{b} = T^{-1}b, \hat{c} = cT \quad , \quad T \text{ não singular}$$