1ª Questão: Determine: a) A função de transferência do sistema

$$y[n+1] + 3y[n] = x[n]$$

b) A solução forçada para a entrada $x[n] = -2j + (-j)^n$

$$H(z) = \frac{1}{z+3}, \quad y_f[n] = H(1)(-2j) + H(-j)(-j)^n = \frac{-2j}{4} + \frac{1}{-j+3}(-j)^n$$

2ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{z^2 + 23z}{(z-2)(z+3)}, \quad 2 < |z| < 3$$

$$X(z) = \frac{z^2 + 23z}{(z-2)(z+3)} = \frac{5z}{z-2} - \frac{4z}{z+3}, \quad x[n] = 5(2)^n u[n] + 4(-3)^n u[-n-1]$$

3ª Questão: Determine o valor da soma $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)3^{-(n+1)}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n^2+1)3^{-(n+1)}\right) = \mathcal{Z}\Big\{(n^2+1)3^{-(n+1)}u[n]\Big\}\Big|_{z=1} = \frac{1}{3}\left(\frac{(1/3)z^2 + (1/3)^2 z}{(z-1/3)^3} + \frac{z}{(z-1/3)}\right)\Big|_{z=1} = 1$$

4ª Questão: Determine, para as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias discretas independentes $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ cujas transformadas Z são dadas respectivamente por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{-z}{z-2}, \ |z| < 2, \quad \mathcal{E}\{z^{\mathbb{Y}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{Y} = k\} = \frac{-5}{2z-7}, \ |z| < 7/2$$

a) A transformada Z da distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta $\mathbb{W} = \mathbb{X} + 2\mathbb{Y}$

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{W}}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}+2\mathbb{Y}}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\}\mathcal{E}\{(z^2)^{\mathbb{Y}}\} = \frac{5z}{(z-2)(2z^2-7)} = \frac{5z}{2z^3 - 4z^2 - 7z + 14}, \ |z| < \sqrt{7/2}$$

b) $\Pr\{\mathbb{W} = 1\} = \left(\dfrac{d}{dz}\right) \dfrac{5z}{2z^3 - 4z^2 - 7z + 14}\Big|_{z=0} = 5/14$

c) $\mathcal{E}\{\mathbb{W}\} = \displaystyle\sum_k k \Pr\{\mathbb{W} = k\} = \left(z\frac{d}{dz}\right) \frac{5z}{2z^3 - 4z^2 - 7z + 14}\Big|_{z=1} = \frac{14}{5}$

5ª Questão: a) Determine $H(z)$, isto é, a transformada Z da resposta ao impulso (causal) $h[n]$ do sistema descrito pela equação a diferenças

$$y[n+2] - y[n] = -3x[n+1] + x[n]$$

b) Determine $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ (condições iniciais nulas)

$$(p^2 - 1)y[n] = (-3p + 1)x[n], \quad H(z) = \frac{N(p)}{D(p)}\Big|_{p=z} = \frac{-3z+1}{z^2-1} = \frac{-3z+1}{(z-1)(z+1)}$$

$$H(z) = -1 - \frac{z}{z-1} + \frac{2z}{z+1}, \quad h[n] = -\delta[n] + \big(-1 + 2(-1)^n\big)u[n]$$

6ª Questão: a) Determine $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]u[n]\}$, isto é, a transformada Z da sequência $y[n]u[n]$ solução para $n \geq 0$ da equação a diferenças

$$y[n+2] - 2y[n+1] - 8y[n] = 0, \quad y[0] = -2,\ y[1] = 22$$

b) Determine $y[n]$

$$Y(z) = \frac{z^2 y[0] + zy[1] - 2zy[0]}{z^2 - 2z - 8} = \frac{-2z^2 + 26z}{(z+2)(z-4)} = \frac{-5z}{z+2} + \frac{3z}{z-4} \quad y[n] = (-5(-2)^n + 3(4)^n)u[n]$$

7ª Questão: Determine a solução forçada para

$$y[n+1] - y[n] = 6n + 8$$

$$(p-1)y[n] = 6n + 8, \quad \bar{D}(p) = (p-1)^2,\ y_f[n] = 5n + 3n^2$$

8ª Questão: Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem como solução a sequência

$$y[n] = n(-1)^n + n^2(-1)^n$$

$$\bar{D}(p) = (p+1)^3, \quad (p^3 + 3p^2 + 3p + 1)y[n] = 0,\ y[0] = 0, y[1] = -2, y[2] = 6$$

9ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema abaixo para $x = 0$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -(v_1 + 2)(v_2 + 2) - x \\ \dot{v}_2 &= (v_1 + 1)(v_2 + 1) + 2x \end{aligned}$$

$$(-2, -1), \quad (-1, -2)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx, \quad v \in \mathbb{R}^2$$

$$A = \begin{bmatrix} -v_2 - 2 & -v_1 - 2 \\ v_2 + 1 & v_1 + 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(-2, -1) : \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (-1, -2) : \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

10ª Questão: Completando os valores nos quadrados em branco, determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\dddot{y} + 7\ddot{y} - 5\dot{y} - 3y = 3\dddot{x} + 27\ddot{x} - 20\dot{x} - 11x$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$