1ª Questão: Determine a) $\exp(At)$; b) $y(t)$ solução do sistema $\dot{v} = Av$, $y = cv$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \ c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} v, \ v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ y(t) = c\exp(At)v(0), \quad \exp(\lambda t) = \alpha + \alpha_1 \lambda$$

$$\exp(3t) = \alpha_0 + 3\alpha_1, \ \exp(-t) = \alpha_0 - \alpha_1 \ \Rightarrow \ \alpha_0 = \frac{3\exp(-t) + \exp(3t)}{4}, \ \alpha_1 = \frac{\exp(3t) - \exp(-t)}{4}$$

$$\exp(At) = \alpha_0 I + \alpha_1 A = \begin{bmatrix} \exp(3t) & 0 \\ \dfrac{-\exp(3t) + \exp(-t)}{2} & \exp(-t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \frac{3\exp(-t) + \exp(3t)}{2}$$

2ª Questão: Determine: a) J (forma de Jordan); b) Q tal que $AQ = QJ$ para

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda+2)^3, \quad A-(-2)I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} = 2, \text{ dim. esp. nulo} = 3-2 = 1$$

$$\Rightarrow J = J_3(-2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} a & d & g \\ a & a+d & d+g \\ -a & -d & a-g \end{bmatrix}$$

3ª Questão: Determine um sistema linear homogêneo $\dot{v} = Av$, $y = cv$ e a condição inicial $v(0)$ (i.e., matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, vetores $c \in \mathbb{R}^{1\times n}$ e $v(0) \in \mathbb{R}^n$) que produzem como solução $y(t) = 20t^2\cos(5t)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \ \exp(At) = \begin{bmatrix} \cos(5t) & -\text{sen}(5t) & t\cos(5t) & -t\,\text{sen}(5t) & (t^2/2)\cos(5t) & -(t^2/2)\,\text{sen}(5t) \\ \text{sen}(5t) & \cos(5t) & t\,\text{sen}(5t) & t\cos(5t) & (t^2/2)\text{sen}(5t) & (t^2/2)\cos(5t) \\ 0 & 0 & \cos(5t) & -\text{sen}(5t) & t\cos(5t) & -t\,\text{sen}(5t) \\ 0 & 0 & \text{sen}(5t) & \cos(5t) & t\,\text{sen}(5t) & t\cos(5t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(5t) & -\text{sen}(5t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sen}(5t) & \cos(5t) \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v(0)' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4ª Questão: Determine a) os valores de b_1 e b_2 para que o sistema seja controlável; b) os valores de c_1 e c_2 para que o sistema seja observável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -1 & 18 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} v$$

$$\text{Ctrb(A,b)} = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 18b_2 - b_1 \\ b_2 & 8b_2 - b_1 \end{bmatrix}, \quad \det\big(\text{Ctrb(A,b)}\big) = -b_1^2 + 9b_1b_2 - 18b_2^2 = (b_1 - 3b_2)(6b_2 - b_1)$$

Deixa de ser controlável se $b_1 = 3b_2$ ou se $b_1 = 6b_2$

$$\text{Obsv(A,c)} = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_1 - c_2 & 18c_1 + 8c_2 \end{bmatrix}, \quad \det\big(\text{Obsv(A,c)}\big) = 18c_1^2 + 9c_1c_2 + c_2^2 = (6c_1 + c_2)(3c_1 + c_2)$$

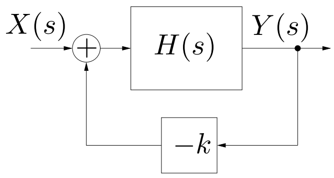
Deixa de ser observável se $c_2 = -6c_1$ ou se $c_2 = -3c_1$

5ª Questão: Sabendo que, para sistemas controláveis $\dot{v} = Av + bx$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ existe $\beta \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que a entrada $x(t) = b'\exp(-A't)\beta u(t)$ (o símbolo $(\ )'$ indica o transposto do vetor ou matriz), $t \in [0, \tau]$ leva o sistema de $v(0) = 0$ para $v(\tau)$ arbitrário no tempo τ, determine $x(t)$ que leve de $v(0) = 0$ a $v(3) = 10$ em $\tau = 3$ segundos para o sistema dado por $\dot{v} = -2v + 4x$

$$V(s) = \frac{4}{s+2}X(s), \quad X(s) = \frac{4\beta}{s-2} \quad \Rightarrow \quad V(s) = \frac{16\beta}{(s+2)(s-2)} = \frac{4\beta}{(s-2)} - \frac{4\beta}{(s+2)}$$

$$v(t) = 4\beta\left(\exp(2t) - \exp(-2t)\right)u(t), \quad v(3) = 10 = 4\beta\left(\exp(6) - \exp(-6)\right) \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{(10/4)}{\exp(6) - \exp(-6)}$$

6ª Questão: Determine o intervalo para k tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável



$$H(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + 8s + 15}, \quad D(s) = s^3 + ks^2 + (8-k)s + 15 \ , \ 3 < k < 5$$

7ª Questão: Usando como função de Lyapunov candidata $\psi(v_1, v_2) = 0.5v_1^2 + 0.5v_2^2$, determine um conjunto Ω no espaço de estados $\mathbb{R}^2$ no qual a função $\psi(v_1, v_2)$ garanta a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $(v_1, v_2) = (0, 0)$ do sistema não linear dado por

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\, v_1 + v_1 v_2^2 \\ \dot{v}_2 &= -\, v_2 \end{aligned}$$

Tem-se $\psi(v_1, v_2) > 0$, $\forall (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ e

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(v_1, v_2) &= v_1 \dot{v}_1 + v_2 \dot{v}_2 = v_1(-v_1 + v_1 v_2^2) + v_2(-v_2) \\ &= -v_1^2 - (1 - v_1^2)v_2^2 = -v_1^2(1 - v_2^2) - v_2^2 < 0, \quad \forall (v_1, v_2) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

se $(v_1, v_2) \in \Omega = \{(v_1, v_2) : -1 < v_1 < 1\}$ ou se $(v_1, v_2) \in \Omega = \{(v_1, v_2) : -1 < v_2 < 1\}$

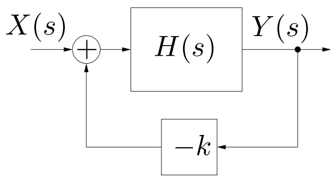
8ª Questão: Um sistema linear invariante no tempo dependente dos parâmetros α, β e uma matriz P simétrica definida positiva produzem (A' indica o transposto da matriz A)

$$-Q = A'P + PA = \begin{bmatrix} -5 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Considerando a desigualdade de Lyapunov, determine os intervalos de α e β reais que garantem a estabilidade assintótica do sistema linear. A desigualdade de Lyapunov impõe $A'P + PA = -Q < 0$, ou seja, $Q > 0$, se e somente se os menores principais líderes positivos forem positivos.

$$5 > 0, \quad 5\beta - \alpha^2 > 0, \quad 3(5\beta - \alpha^2) > 0 \quad \Rightarrow \quad 5\beta > \alpha^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \beta > 0, \quad -\sqrt{5\beta} < \alpha < \sqrt{5\beta}$$

9ª Questão: Esboce o lugar das raízes (eixo real e assíntotas) para o sistema realimentado da figura, determinando o ponto de encontro das assíntotas

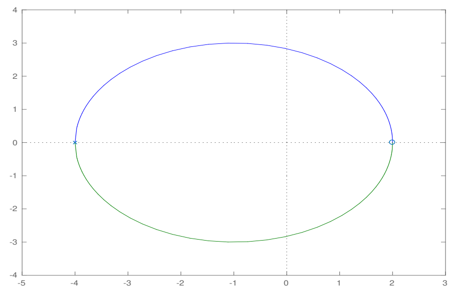


$$H(s) = \frac{(s-3)^2(s+8)}{(s-4)^2(s-5)^6(s-10)}$$

Lugar das raízes no eixo real: $(-8, 10)$

$$\eta = 6, \quad \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{-\pi}{6}, \frac{-\pi}{2}, \frac{-5\pi}{6} \quad (4+4+5+5+5+5+5+5+10-(3+3-8))/6 = 50/6 = 25/3$$

10ª Questão: No lugar das raízes da figura (dois polos em -4, dois zeros em 2), determine os valores de ω e o valor de k nos cruzamentos com o eixo imaginário.



$$D(s) + kN(s) = (s^2 + 8s + 16) + k(s^2 - 4s + 4) = 0$$

$$s = j\omega, \quad (8\omega - 4k\omega)j = 0, \ -\omega^2 + 16 - k\omega^2 + 4k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2, \ \omega^2 = 8$$