Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

1ª Questão: Determine: a) A função de transferência do sistema

$$y[n+1] - 5y[n] = x[n+1]$$

b) A solução forçada para a entrada $x[n] = j + (j)^n$

2ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{-z^2 - 7z}{(z+1)(z-2)}, \quad 1 < |z| < 2$$

3ª Questão: Determine o valor da soma $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)2^{-(n+1)}$

4ª Questão: Determine, para as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias discretas independentes $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ cujas transformadas Z são dadas respectivamente por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{-2z}{z-3},\ |z| < 3, \quad \mathcal{E}\{z^{\mathbb{Y}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{Y} = k\} = \frac{-3}{2z-5},\ |z| < 5/2$$

a) A transformada Z da distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta $\mathbb{W} = \mathbb{X} + 2\mathbb{Y}$

b) $\Pr\{\mathbb{W} = 1\}$

c) $\mathcal{E}\{\mathbb{W}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{W} = k\}$

5ª Questão: a) Determine $H(z)$, isto é, a transformada Z da resposta ao impulso (causal) $h[n]$ do sistema descrito pela equação a diferenças

$$y[n+2] + y[n+1] - 6y[n] = 4x[n+2] - 17x[n+1] - 12x[n]$$

b) Determine $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ (condições iniciais nulas)

6ª Questão: a) Determine $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]u[n]\}$, isto é, a transformada Z da sequência $y[n]u[n]$ solução para $n \geq 0$ da equação a diferenças

$$y[n+2] - 2y[n+1] - 15y[n] = 0, \quad y[0] = 4,\ y[1] = 36$$

b) Determine $y[n]$

7ª Questão: Determine a solução forçada para

$$y[n+1] - y[n] = 10n + 7$$

8ª Questão: Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem como solução a sequência

$$y[n] = (n-1)^2 + (n^2 - 1)$$

9ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema abaixo para $x = 0$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 =& (v_1 - 1)(v_2 + 2) + 3x \\ \dot{v}_2 =& (v_1 + 2)(v_2 - 1) - 5x \end{aligned}$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx, \quad v \in \mathbb{R}^2$$

10ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\dddot{y} - 8\ddot{y} - 3\dot{y} + 5y = 2\dddot{x} - 13\ddot{x} + 1\dot{x} + 6x$$

Transformada Z: $\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \dfrac{z}{z-a}\ ,\ |z|>|a| \quad , \quad \mathcal{Z}\{-a^n u[-n-1]\} = \dfrac{z}{z-a}\ ,\ |z|<|a|$

$$\mathcal{Z}\{na^{n-1}u[n]\} = \frac{z}{(z-a)^2}\ ,\ |z|>|a| \quad , \quad \mathcal{Z}\{-na^{n-1}u[-n]\} = \frac{z}{(z-a)^2}\ ,\ |z|<|a|$$

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z), z\in\Omega_x \ \Leftrightarrow\ \mathcal{Z}\{x[-n]\} = X(z^{-1}), z^{-1}\in\Omega_x \quad , \quad \mathcal{Z}\{x_1[n]*x_2[n]\} = \mathcal{Z}\{x_1[n]\}\mathcal{Z}\{x_2[n]\}$$

$$\mathcal{Z}\{n^m x[n]\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^m X(z) \quad , \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^m x[k] = \mathcal{Z}\{n^m x[n]\}\Big|_{z=1}\ ,\ 1\in\Omega_x\ ,\ m\in\mathbb{N}$$

$$\mathcal{Z}\{y[n] = x[n-m]u[n-m]\} = z^{-m}\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} \quad , \quad m\in\mathbb{Z}_+\ ,\ \Omega_y=\Omega_x$$

$$\mathcal{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m\Big(\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\Big)\ ,\ m\in\mathbb{Z}_+$$

$$\mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n \\ m\end{pmatrix} a^{n-m}u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}}\ ,\ |z|>|a|\ ,\ m\in\mathbb{N} \quad , \quad \mathcal{Z}\{n^2 a^n u[n]\} = \frac{az^2+a^2z}{(z-a)^3}\ ,\ |z|>|a|$$

$$\mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n+m \\ m\end{pmatrix} a^{n}u[n]\right\} = (1-az^{-1})^{-(m+1)} = \frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}\ ,\ m\in\mathbb{N}\ ,\ |z|>|a|$$

$x[0] = \lim\limits_{|z|\to+\infty} X(z)$, Ω_x exterior de um círculo , $x[+\infty] = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)X(z)$, $|z|>\rho$, $0<\rho\leq 1$

Transformada Z e Probabilidade:

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \mathcal{Z}\{p[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k]z^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Pr\{\mathbb{X}=k\}z^k, \quad G_{\mathbb{X}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}G_{\mathbb{X}}(z)\Big|_{z=0} z^n$$

$$\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k kp[k]\ ,\quad \sigma^2_{\mathbb{X}} = \mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} - \mathcal{E}\{\mathbb{X}\}^2\ ,\quad \mathcal{E}\{\mathbb{X}^m\} = \left(\frac{zd}{dz}\right)^m \mathcal{Z}\{p[n]\}\Big|_{z=1}$$

$\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ var. aleatórias independentes $\Rightarrow$ $\mathcal{E}\{z^{(\mathbb{X}+\mathbb{Y})}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\}\mathcal{E}\{z^{\mathbb{Y}}\}$

Variáveis de estado: $\dot v(t) = f(v(t),x(t),t)$, $y(t) = g(v(t),x(t),t)$

Pontos de equilíbrio: $\bar v$ tais que $f(\bar v,\bar x)=0$, $\bar x=$cte. Sistema linear (em torno dos pontos de equilíbrio)

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right]\Big|_{\bar v,\bar x}\ ,\ B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\Big|_{\bar v,\bar x}\ ,\ C = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j}\right]\Big|_{\bar v,\bar x}\ ,\ D = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]\Big|_{\bar v,\bar x}$$

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\beta_2p^2+\beta_1p+\beta_0}{p^3+\alpha_2p^2+\alpha_1p+\alpha_0}+\beta_3, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2\end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix}\beta_0 & \beta_1 & \beta_2\end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix}\beta_3\end{bmatrix}$$

$$\dot v = Av+bx\ ,\ y = cv+dx\ ,\ \frac{N(p)}{D(p)} = c(p\mathrm{I}-A)^{-1}b+d = b'(p\mathrm{I}-A')^{-1}c'+d,\quad p=\frac{d}{dt}$$

$$v = T\hat v \quad\Rightarrow\quad \hat A = T^{-1}AT,\ \hat b = T^{-1}b, \hat c = cT \quad , \quad T \text{ não singular}$$