1ª Questão: Determine: a) A função de transferência do sistema $y[n+1] - 5y[n] = x[n+1]$
b) A solução forçada para a entrada $x[n] = j + (j)^n$

$$H(z) = \frac{z}{z-5}, \quad y_f[n] = H(1)j + H(j)(j)^n = -\frac{j}{4} + \frac{j}{j-5}(j)^n$$

2ª Questão: Determine $x[n]$ cuja transformada Z é dada por $X(z) = \dfrac{-z^2 - 7z}{(z+1)(z-2)}, \quad 1 < |z| < 2$

$$X(z) = \frac{-z^2 - 7z}{(z+1)(z-2)} = \frac{2z}{z+1} - \frac{3z}{z-2}, \quad x[n] = 2(-1)^n u[n] + 3(2)^n u[-n-1]$$

3ª Questão: Determine o valor da soma $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)2^{-(n+1)}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)2^{-(n+1)}\right) = \mathcal{Z}\Big\{(n+1)2^{-(n+1)}u[n]\Big\}\Big|_{z=1} = \frac{1}{2}\left(\frac{(1/2)z}{(z-1/2)^2} + \frac{z}{(z-1/2)}\right)\Big|_{z=1} = 2$$

4ª Questão: Determine, para as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias discretas independentes $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ cujas transformadas Z são dadas respectivamente por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{-2z}{z-3}, \ |z| < 3, \quad \mathcal{E}\{z^{\mathbb{Y}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{Y} = k\} = \frac{-3}{2z-5}, \ |z| < 5/2$$

a) A transformada Z da distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta $\mathbb{W} = \mathbb{X} + 2\mathbb{Y}$

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{W}}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}+2\mathbb{Y}}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\}\mathcal{E}\{(z^2)^{\mathbb{Y}}\} = \frac{6z}{(z-3)(2z^2-5)} = \frac{6z}{2z^3 - 6z^2 - 5z + 15}, \ |z| < \sqrt{5/2}$$

b)
$$\Pr\{\mathbb{W} = 1\} = \left(\frac{d}{dz}\right)\frac{6z}{2z^3 - 6z^2 - 5z + 15}\Big|_{z=0}$$
$$= \left(\frac{6}{2z^3 - 6z^2 - 5z + 15} - \frac{6z(6z^2 - 12z - 5)}{(2z^3 - 6z^2 - 5z + 15)^2}\right)\Big|_{z=0} = 2/5$$

c)
$$\mathcal{E}\{\mathbb{W}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{W} = k\} = \left(z\frac{d}{dz}\right)\frac{6z}{2z^3 - 6z^2 - 5z + 15}\Big|_{z=1}$$
$$= z\left(\frac{6}{2z^3 - 6z^2 - 5z + 15} - \frac{6z(6z^2 - 12z - 5)}{(2z^3 - 6z^2 - 5z + 15)^2}\right)\Big|_{z=1} = \frac{17}{6}$$

5ª Questão: a) Determine $H(z)$, isto é, a transformada Z da resposta ao impulso (causal) $h[n]$ do sistema descrito pela equação a diferenças

$$y[n+2] + y[n+1] - 6y[n] = 4x[n+2] - 17x[n+1] - 12x[n]$$

b) Determine $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ (condições iniciais nulas)

$$(p^2 + p - 6)y[n] = (4p^2 - 17p - 12)x[n], \quad H(z) = \frac{N(p)}{D(p)}\Big|_{p=z} = \frac{4z^2 - 17z - 12}{z^2 + z - 6} = \frac{4z^2 - 17z - 12}{(z-2)(z+3)}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{4z^2 - 17z - 12}{z(z-2)(z+3)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z+3}$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = 2 - \frac{3z}{z-2} + \frac{5z}{z+3}, \quad h[n] = 2\delta[n] + \big(-3(2)^n + 5(-3)^n\big)u[n]$$

6ª Questão: a) Determine $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]u[n]\}$, isto é, a transformada Z da sequência $y[n]u[n]$ solução para $n \geq 0$ da equação a diferenças

$$y[n+2] - 2y[n+1] - 15y[n] = 0, \quad y[0] = 4, \ y[1] = 36$$

b) Determine $y[n]$

$$Y(z) = \frac{z^2 y[0] + zy[1] - 2zy[0]}{z^2 - 2z - 15} = \frac{4z^2 + 28z}{(z+3)(z-5)} = \frac{-2z}{z+3} + \frac{6z}{z-5}, \quad y[n] = (-2(-3)^n + 6(5)^n)u[n]$$

7ª Questão: Determine a solução forçada para

$$y[n+1] - y[n] = 10n + 7$$

$$(p-1)y[n] = 10n + 7, \quad \bar{D}(p) = (p-1)^2, \ y_f[n] = 2n + 5n^2$$

8ª Questão: Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem como solução a sequência

$$y[n] = (n-1)^2 + (n^2 - 1)$$

$$y[n] = (n^2 - 2n + 1) + (n^2 - 1) = 2n^2 - 2n$$

$$\bar{D}(p) = (p-1)^3, \quad (p^3 - 3p^2 + 3p - 1)y[n] = 0, \ y[0] = 0, y[1] = 0, y[2] = 4$$

9ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema abaixo para $x = 0$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= (v_1 - 1)(v_2 + 2) + 3x \\ \dot{v}_2 &= (v_1 + 2)(v_2 - 1) - 5x \end{aligned}$$

$$(1,1), \quad (-2,-2)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx, \quad v \in \mathbb{R}^2$$

$$A = \begin{bmatrix} v_2 + 2 & v_1 - 1 \\ v_2 - 1 & v_1 + 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$(1,1) : \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (-2,-2) : \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

10ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\dddot{y} - 8\ddot{y} - 3\dot{y} + 5y = 2\dddot{x} - 13\ddot{x} + 1\dot{x} + 6x$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$