Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

1ª Questão: Determine: a) $\exp(At)$; b) $y(t)$ para

$$\dot{v} = Av, \quad y = cv, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2ª Questão: Determine: a) J (forma de Jordan); b) Q tal que $AQ = QJ$ para

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda + 1)^3$$

3ª Questão: Determine um sistema linear homogêneo $\dot{v} = Av$, $y = cv$ e a condição inicial $v(0)$ (i.e., matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, vetores $c \in \mathbb{R}^{1\times n}$ e $v(0) \in \mathbb{R}^n$) que produzem como solução

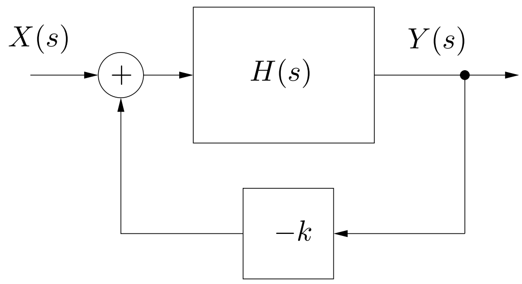
$$y(t) = 5t\exp(2t)\cos(3t) - 10\exp(2t)\ \mathrm{sen}(3t)$$

4ª Questão: Determine a) os valores de b_1 e b_2 para que o sistema seja controlável; b) os valores de c_1 e c_2 para que o sistema seja observável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} v$$

5ª Questão: Sabendo que, para sistemas controláveis $\dot{v} = Av + bx$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, existe $\beta \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que a entrada $x(t) = b'\exp(-A't)\beta u(t)$ (o símbolo $(\ )'$ indica o transposto do vetor ou matriz), $t \in [0, \tau]$ leva o sistema de $v(0) = 0$ para $v(\tau)$ arbitrário no tempo τ, determine $x(t)$ que leve de $v(0) = 0$ a $v(5) = -4$ em $\tau = 5$ segundos para o sistema dado por $\dot{v} = 3v + x$

6ª Questão: Determine o intervalo para $k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável



$$H(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + 4s + 3}$$

7ª Questão: Usando como função de Lyapunov candidata $\psi(v_1, v_2) = 0.5v_1^2 + 0.5v_2^2$, determine um conjunto Ω no espaço de estados $\mathbb{R}^2$ no qual a função $\psi(v_1, v_2)$ garanta a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $(v_1, v_2) = (0, 0)$ do sistema não linear dado por

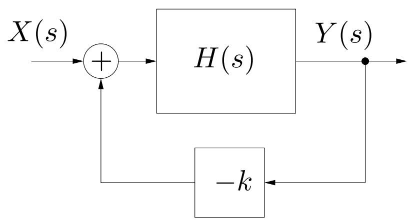
$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= (v_1 - v_2)(v_1^2 + v_2^2 - 1) \\ \dot{v}_2 &= (v_1 + v_2)(v_1^2 + v_2^2 - 1) \end{aligned}$$

8ª Questão: Um sistema linear invariante no tempo dependente dos parâmetros α, β e uma matriz P simétrica definida positiva produzem (A' indica o transposto da matriz A)

$$-Q = A'P + PA = \begin{bmatrix} -2 & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta & 0 \\ \alpha & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

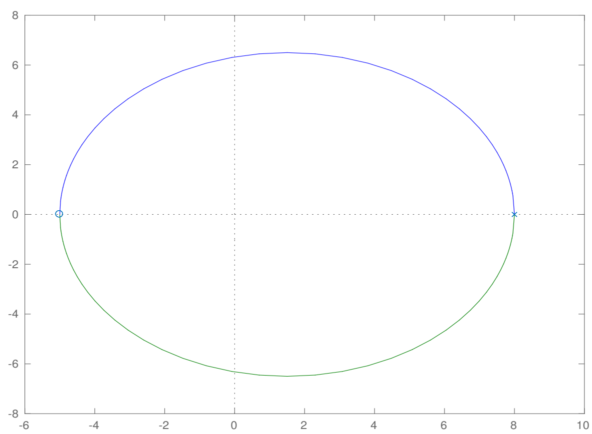
Considerando a desigualdade de Lyapunov, determine os intervalos de α e β reais que garantem a estabilidade assintótica do sistema linear.

9ª Questão: Esboce (nas folhas de papel almaço) o lugar das raízes (eixo real e assíntotas) para o sistema realimentado mostrado na figura, determinando o ponto de encontro das assíntotas



$$H(s) = \frac{(s+4)^2(s-1)^2}{(s+8)^2(s+7)^2(s-3)^2(s-4)^2}$$

10ª Questão: No lugar das raízes da figura (dois polos em 8, dois zeros em -5), determine os valores de ω e o valor de k nos cruzamentos com o eixo imaginário.



Solução da equação de estado

$$y(t) = c\exp(At)v_0 + c\big(\exp(At)u(t)\big) * (bx(t)) + dx(t),\ Y(s) = c(s\mathrm{I}-A)^{-1}v_0 + \big(c(s\mathrm{I}-A)^{-1}b + d\big)X(s)$$

$$\text{Cayley-Hamilton:} \quad \Delta(\lambda) = \det(s\mathrm{I}-A) = 0 \ \Rightarrow\ \Delta(A) = 0$$

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \lambda^i\ ,\ \Delta(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i A^i\ ,\ f\big(\mathrm{diag}(A_1,\ldots,A_N)\big) = \mathrm{diag}\big(f(A_1),\ldots,f(A_N)\big)$$

$$\text{Bloco de Jordan: } J_k(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma \end{bmatrix}\ ,\ f(J_k(\sigma)) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \dot{f}(\lambda) & \cdots & f^{(k-1)}(\lambda)/(k-1)! \\ 0 & f(\lambda) & \cdots & f^{(k-2)}(\lambda)/(k-2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{bmatrix}_{\lambda=\sigma}$$

$$\text{Forma modal: } M = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix},\ \Delta(\lambda) = (\lambda-\sigma)^2 + \omega^2,$$

$$\exp(Mt) = \exp(\sigma t)\begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\mathrm{sen}(\omega t) \\ \mathrm{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}, \quad \text{Forma modal de Jordan: } \begin{bmatrix} M & \mathrm{I} & \cdots & 0 \\ 0 & M & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M \end{bmatrix}$$

Forma de Jordan de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\nu(M_\lambda) = n - \mathrm{rank}(M_\lambda)$ (dimensão do espaço nulo de $M_\lambda = A - \lambda\mathrm{I}$):

$$\dot{v} = Av + bx\ ,\ y = cv + dx, v(0) \quad ,\quad \text{para } x \text{ solução de } x = \bar{c}\bar{v}\ ,\ \dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}, \bar{v}(0)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Sistema autônomo aumentado: } \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\bar{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b\bar{c} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} v(0) \\ \bar{v}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix} \quad , \quad y = \begin{bmatrix} c & d\bar{c} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$$

$M_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log M(\omega)$ sendo log o logaritmo na base 10

Controlabilidade e Observabilidade: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
Controlável se e somente se:

$$\mathit{rank}\big(\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}\big) = n, \quad \text{ou} \quad \mathit{rank}\big(\begin{bmatrix} A-\lambda I & b \end{bmatrix}\big) = n, \quad \forall\lambda \text{ autovalor}$$

Observável se e somente se:

$$\mathit{rank}\Big(\begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}\Big) = n, \quad \text{ou} \quad \mathit{rank}\Big(\begin{bmatrix} A-\lambda I \\ c \end{bmatrix}\Big) = n, \quad \forall\lambda \text{ autovalor}$$

Decomposição canônica: $\bar{v} = Pv$
Se *rank* de $\mathrm{Ctrb}(A,b) = r < n$, P^{-1} é formada por colunas de 1 a r LI de $\mathrm{Ctrb}(A,b)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x \quad , \quad y = \begin{bmatrix} \bar{c}_c & \bar{c}_{\bar{c}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Se *rank* de $\mathrm{Obsv}(A,c) = r < n$, P é formada por linhas de 1 a r LI de $\mathrm{Obsv}(A,c)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_o \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_o \\ \bar{b}_{\bar{o}} \end{bmatrix} x \quad , \quad y = \begin{bmatrix} \bar{c}_o & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Estabilidade por Lyapunov: Considere o sistema $\dot{v} = f(v)$. O ponto de equilíbrio $\bar{v} = 0$ é assintoticamente estável se existir um domínio Ω contendo a origem e uma função escalar $\psi(v)$ diferenciável tal que

$$\psi(0) = 0 \quad , \quad \psi(v) > 0 \ \forall v \in \Omega - \{0\} \ \text{ e } \ \dot{\psi}(v) = \frac{d}{dt}\psi(v) < 0 \ \forall v \in \Omega - \{0\}$$

Lyapunov (SLIT): A solução da equação de Lyapunov $A'P + PA = -Q$, $\forall Q = Q' > 0$, é única, simétrica e definida positiva SSE todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa ($\equiv$ assintoticamente estável)

Introdução à realimentação: Sensibilidade de $f(x, y)$ em relação a x: $\dfrac{x}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Lugar das Raízes: $1 + kH(s) = 0$, $H(s) = N(s)/D(s) \ \Rightarrow \ D(s) + kN(s) = 0$

$$D(s) = \sum_{r=0}^{m} \alpha_r s^r \ , \ \alpha_m = 1 \quad , \quad N(s) = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r s^r$$

1) Simetria em relação ao eixo real.

2) Os polos e os zeros (finitos) de malha aberta fazem parte do lugar das raízes para, respectivamente, $k = 0$ e $k \to +\infty$.

3) Condição de fase: $\displaystyle\sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) = \pi$

sendo $\phi_r(s) = \angle(s-\lambda_r)$ o ângulo do vetor do pólo λ_r até o ponto s do lugar das raízes e $\varphi_r(s) = \angle(s-\gamma_r)$ o ângulo do vetor do zero γ_r até o ponto s do lugar das raízes.

4) Condição de módulo: $\displaystyle k = \Big(\prod_{r=1}^{m} |s - \lambda_r|\Big)/\Big(\prod_{r=1}^{\ell} |s - \gamma_r|\Big)$

5) Eixo real: O lugar das raízes no eixo real está sempre à esquerda de um número ímpar de polos e zeros reais.

6) Ângulo de partida dos polos: $\displaystyle \phi_i(s)\Big|_{s\approx\lambda_i} = \pi + \sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{m} \phi_r(s)$

7) Ângulo de chegada aos zeros: $\displaystyle \varphi_i(s)\Big|_{s\approx\gamma_i} = \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{\ell} \varphi_r(s)$

8) O número de assíntotas η é igual ao número de zeros no infinito, isto é, $\eta = m - \ell$

9) Ângulos das assíntotas: $\dfrac{\pi(1 + 2r)}{m - \ell} \quad , \quad \beta_\ell > 0 \quad , \quad r \in \mathbb{Z}$

10) Encontro das assíntotas ($\eta \geq 2$): no eixo real no ponto $\displaystyle \frac{1}{\eta}\left(\sum_{r=1}^{m} \mathrm{Re}(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{\ell} \mathrm{Re}(\gamma_r)\right)$

11) Cruzamento com o eixo real: Os pontos do lugar das raízes de chegada ou partida do eixo real, quando existem, satisfazem a equação $N(s)\dot{D}(s) = D(s)\dot{N}(s)$

12) Cruzamento com o eixo imaginário: ocorrem em $s = \pm j\omega$, com $\omega \geq 0$, solução de $D(s)+kN(s) = 0$