$1^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine: a) $\exp(At)$; b) $y(t)$ para

$$\dot{v} = Av, \quad y = cv, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad y(t) = c\exp(At)v(0)$$

$\exp(\lambda t) = \alpha + \alpha_1 \lambda$, $\exp(t) = \alpha_0 + \alpha_1$, $\exp(2t) = \alpha_0 + 2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_0 = 2\exp(t) - \exp(2t)$, $\alpha_1 = \exp(2t) - \exp(t)$

$$\exp(At) = \alpha_0 I + \alpha_1 A = \begin{bmatrix} \exp(t) & 3\exp(2t) - 3\exp(t) \\ 0 & \exp(2t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = 4\exp(2t) - 2\exp(t)$$

$2^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine: a) J (forma de Jordan); b) Q tal que $AQ = QJ$ para

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \ \Delta(\lambda) = (\lambda+1)^3, \ A-(-1)I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ rank} = 1, \text{ dim. esp. nulo} = 3-1 = 2$$

$$\Rightarrow J = \text{diag}(J_2(-1), J_1(-1)) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} a & d & \bar{a} \\ a & e & b \\ -a & a-e & -b \end{bmatrix}$$

$3^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine um sistema linear homogêneo $\dot{v} = Av$, $y = cv$ e a condição inicial $v(0)$ (i.e., matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, vetores $c \in \mathbb{R}^{1\times n}$ e $v(0) \in \mathbb{R}^n$) que produzem como solução
$y(t) = 5t\exp(2t)\cos(3t) - 10\exp(2t)\,\text{sen}(3t)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \exp(At) = \exp(2t) \begin{bmatrix} \cos(3t) & -\text{sen}(3t) & t\cos(3t) & -t\,\text{sen}(3t) \\ \text{sen}(3t) & \cos(3t) & t\,\text{sen}(3t) & t\cos(3t) \\ 0 & 0 & \cos(3t) & -\text{sen}(3t) \\ 0 & 0 & \text{sen}(3t) & \cos(3t) \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, \quad v(0)' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$4^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine a) os valores de b_1 e b_2 para que o sistema seja controlável; b) os valores de c_1 e c_2 para que o sistema seja observável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} v$$

$$\text{Ctrb(A,b)} = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & -b_1 - b_2 \\ b_2 & 10b_1 + 6b_2 \end{bmatrix}, \ \det\big(\text{Ctrb(A,b)}\big) = 10b_1^2 + 7b_1 b_2 + b_2^2 = (b_2 + 2b_1)(b_2 + 5b_1)$$

Deixa de ser controlável se $b_2 = -2b_1$ ou se $b_2 = -5b_1$

$$\text{Obsv(A,c)} = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ 10c_2 - c_1 & 6c_2 - c_1 \end{bmatrix}, \ \det\big(\text{Obsv(A,c)}\big) = -c_1^2 + 7c_1c_2 - 10c_2^2 = (2c_2 - c_1)(c_1 - 5c_2)$$

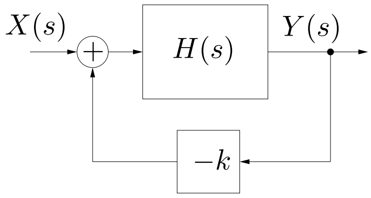
Deixa de ser observável se $c_1 = 2c_2$ ou se $c_1 = 5c_2$

$5^{\underline{a}}$ **Questão:** Sabendo que, para sistemas controláveis $\dot{v} = Av + bx$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ existe $\beta \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que a entrada $x(t) = b'\exp(-A't)\beta u(t)$ (o símbolo $(\ )'$ indica o transposto do vetor ou matriz), $t \in [0, \tau]$ leva o sistema de $v(0) = 0$ para $v(\tau)$ arbitrário no tempo τ, determine $x(t)$ que leve de $v(0) = 0$ a $v(5) = -4$ em $\tau = 5$ segundos para o sistema dado por $\dot{v} = 3v + x$

$$V(s) = \frac{1}{s-3} X(s), \quad X(s) = \frac{\beta}{s+3} \quad \Rightarrow \quad V(s) = \frac{\beta}{(s-3)(s+3)} = \frac{1}{6}\left(\frac{\beta}{(s-3)} - \frac{\beta}{(s+3)}\right)$$

$$v(t) = \frac{\beta}{6}\left(\exp(3t) - \exp(-3t)\right)u(t), \ v(5) = -4 = \frac{\beta}{6}\left(\exp(15) - \exp(-15)\right) \Rightarrow \beta = \frac{-24}{\exp(15) - \exp(-15)}$$

6ª Questão: Determine o intervalo para k tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável



$$H(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + 4s + 3}, \quad D(s) = s^3 + ks^2 + (4-k)s + 3\,, \;\; 1 < k < 3$$

7ª Questão: Usando como função de Lyapunov candidata $\psi(v_1, v_2) = 0.5v_1^2 + 0.5v_2^2$, determine um conjunto Ω no espaço de estados $\mathbb{R}^2$ no qual a função $\psi(v_1, v_2)$ garanta a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $(v_1, v_2) = (0, 0)$ do sistema não linear dado por

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= (v_1 - v_2)(v_1^2 + v_2^2 - 1) \\ \dot{v}_2 &= (v_1 + v_2)(v_1^2 + v_2^2 - 1) \end{aligned}$$

Tem-se $\psi(v_1, v_2) > 0$, $\forall (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ e

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(v_1, v_2) &= v_1\dot{v}_1 + v_2\dot{v}_2 \\ &= v_1(v_1 - v_2)(v_1^2 + v_2^2 - 1) + v_2(v_1 + v_2)(v_1^2 + v_2^2 - 1) \\ &= (v_1^2 + v_2^2)(v_1^2 + v_2^2 - 1) < 0, \quad \forall (v_1, v_2) \neq (0,0), \quad \text{se } (v_1, v_2) \in \Omega = \{(v_1, v_2) : v_1^2 + v_2^2 - 1 < 0\} \end{aligned}$$

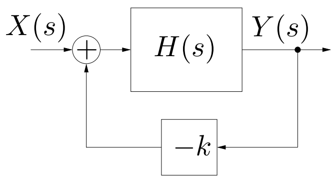
8ª Questão: Um sistema linear invariante no tempo dependente dos parâmetros α, β e uma matriz P simétrica definida positiva produzem (A' indica o transposto da matriz A)

$$-Q = A'P + PA = \begin{bmatrix} -2 & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta & 0 \\ \alpha & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Considerando a desigualdade de Lyapunov, determine os intervalos de α e β reais que garantem a estabilidade assintótica do sistema linear. A desigualdade de Lyapunov impõe $A'P + PA = -Q < 0$, ou seja, $Q > 0$ se e somente se os menores principais líderes forem positivos

$$2 > 0, \quad 2\beta > 0, \quad 4\beta - \beta\alpha^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \beta > 0, \quad 4 - \alpha^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -2 < \alpha < 2$$

9ª Questão: Esboce o lugar das raízes (eixo real e assíntotas) para o sistema realimentado da figura, determinando o ponto de encontro das assíntotas

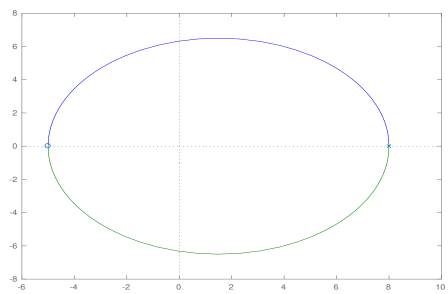


$$H(s) = \frac{(s+4)^2(s-1)^2}{(s+8)^2(s+7)^2(s-3)^2(s-4)^2}$$

Não há lugar das raízes no eixo real (qualquer ponto do eixo real, excetuando os zeros e os polos, tem um número par de polos e zeros à direita).

$$\eta = 4, \quad \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4} \quad (-8 - 8 - 7 - 7 + 3 + 3 + 4 + 4 - (-4 - 4 + 1 + 1))/4 = -10/4 = -2.5$$

10ª Questão: No lugar das raízes da figura (dois polos em 8, dois zeros em -5), determine os valores de ω e o valor de k nos cruzamentos com o eixo imaginário.



$$D(s) + kN(s) = (s^2 - 16s + 64) + k(s^2 + 10s + 25) = 0$$

$$s = j\omega, \quad (-16\omega + k10\omega)j = 0, \;\; -\omega^2 + 64 - k\omega^2 + 25k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1.6, \;\; \omega^2 = 40$$