1ª Questão: Determine a solução forçada (regime permanente) para a entrada $x(t) = 5 + 8\exp(2t)$ do sistema representado pela função de transferência

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 10}{s^2 + 5s + 2}$$

$$y_f(t) = 5|H(j0)| + 8|H(2)|\exp(2t) = 25 + 9\exp(2t)$$

2ª Questão: Um motor elétrico de corrente contínua pode ser modelado por

$$J\frac{d}{dt}\omega_m + T_c = k_f i_f i_a \quad ; \quad v_f = L_f\frac{d}{dt}i_f + R_f i_f \quad ; \quad v_{ta} = R_a i_a + L_a\frac{d}{dt}i_a + k_f i_f \omega_m$$

sendo v_f, L_f, R_f e i_f tensão, indutância, resistência e corrente de campo; v_{ta}, L_a, R_a e i_a tensão terminal, indutância, resistência e corrente de armadura; J momento de inércia, T_c torque da carga, ω_m velocidade angular do rotor e k_f constante de proporcionalidade entre o fluxo no entreferro e a corrente de campo. Para o modelo não-linear na forma de variáveis de estado (v_1, v_2, v_3), com $v_1 = i_f$, $v_2 = i_a$, $v_3 = \omega_m$, $v_{ta} = 3$ e $v_f = 1 + x$ (x é a entrada) e os parâmetros L_f, R_f, L_a, R_a, J, T_c e k_f iguais a 1:

a) Determine o ponto de equilíbrio e o modelo linearizado para $x = 0$

b) Determine os modos próprios e analise o comportamento do sistema linearizado no ponto de equilíbrio (instável, assintoticamente estável ou apenas estável).

$$(1,1,2) \quad , \quad J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -v_3 & -1 & -v_1 \\ v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = \lambda_3^* = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} \text{ , modos próprios} = a_i \exp(\lambda_i t), i = 1,2,3 \ \text{ assint. estável}$$

3ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito por

$$(p^3 - 6p^2 - 4p - 2)y(t) = (5p^3 + 5)x(t) \quad , \quad p = d/dt$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \ , \ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ c = \begin{bmatrix} 15 & 20 & 30 \end{bmatrix} \ , \ d = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

4ª Questão: Determine uma expressão analítica para A^{-2} como combinação linear das matrizes A^q, $q = 0, 1, 2, 3$ para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-2} = \frac{A^3 + A^2}{2}$$

5ª Questão: Determine a solução $y(t)$, $t \geq 0$, para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} x(t) \quad , \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 6 \end{bmatrix} v \qquad , \quad x(t) = 3t^2$$

$$y(t) = \Big(18t^2 - 30t + 19 + 8\exp(-3t) - 27\exp(-2t)\Big)u(t)$$

6ª Questão: Determine $\exp(At)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \exp(2t) & t\exp(2t) & \frac{t^2}{2}\exp(2t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(2t) & t\exp(2t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(2t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\exp(-2t) - 2\exp(-3t) & \exp(-2t) - \exp(-3t) \\ 0 & 0 & 0 & -6\exp(-2t) + 6\exp(-3t) & -2\exp(-2t) + 3\exp(-3t) \end{bmatrix}$$

7ª Questão: Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{12\times 12}$ cuja equação característica é $\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^{12}$. Sabendo que a dimensão do espaço nulo da matriz $M_1 = A - \mathrm{I}$ é igual a 5, $M_1^7 \neq 0$ e que $M_1^8 = 0$, assinale **todas as alternativas corretas**

☐ Há sete autovetores linearmente independentes associados ao autovalor $\lambda = 1$

☐ A forma de Jordan da matriz A possui sete blocos.

X O maior bloco de Jordan é de ordem 8

X O menor bloco é de ordem 1

X Não há blocos de Jordan de ordem 2

8ª Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} , \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 3)^3$$

b) Determine a matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9ª Questão: Determine um sistema linear homogêneo, com matrizes reais, e as condições iniciais, na forma

$$\dot{\tilde{v}} = \tilde{A}\tilde{v} \ , \ \tilde{v}(0) = \tilde{v}_0 \ , \ y = \tilde{c}\tilde{v}$$

cuja solução seja a mesma do sistema

$$\dot{v} = v + 2x \ , \ y = 3v + 4x \ , \ v(0) = 5 \ , \ x(t) = t\exp(2t)\cos(t)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} , \quad \tilde{v}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \tilde{c} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10ª Questão: Determine a resposta ao impulso (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} x$$

$$H(s) = \frac{s^2 - 3s}{(s-2)^2} = 1 + \frac{1}{s-2} - \frac{2}{(s-2)^2} \quad , \quad h(t) = \delta(t) + (1 - 2t)\exp(2t)u(t)$$