

Nome:

RA:

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado. Use três algarismos significativos. Números complexos devem ser representados na forma polar, com ângulo em radianos.

1ª Questão: Determine a solução forçada (i.e. regime permanente) do sistema descrito pela função de transferência $H(s)$ abaixo quando a entrada é dada por $x(t) = 100 \cos(5t) + 100 \sin(2t)$

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 5s^2 + 8s + 1}$$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2ª Questão: a) Determine a função de transferência $H(s) = Y(s)/X(s)$ do sistema descrito pelas equações

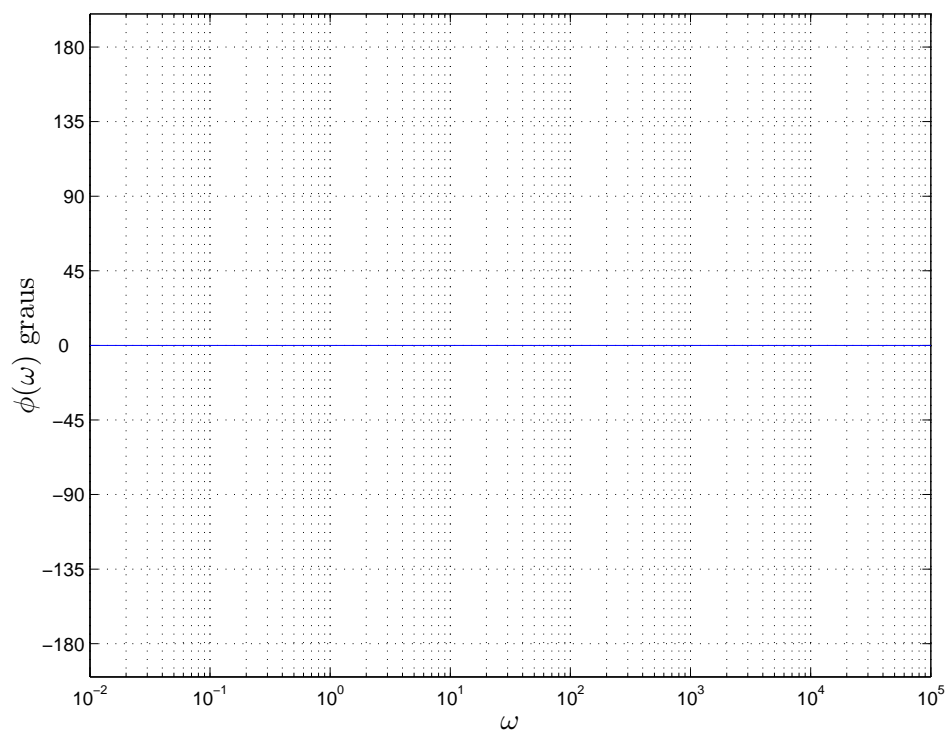
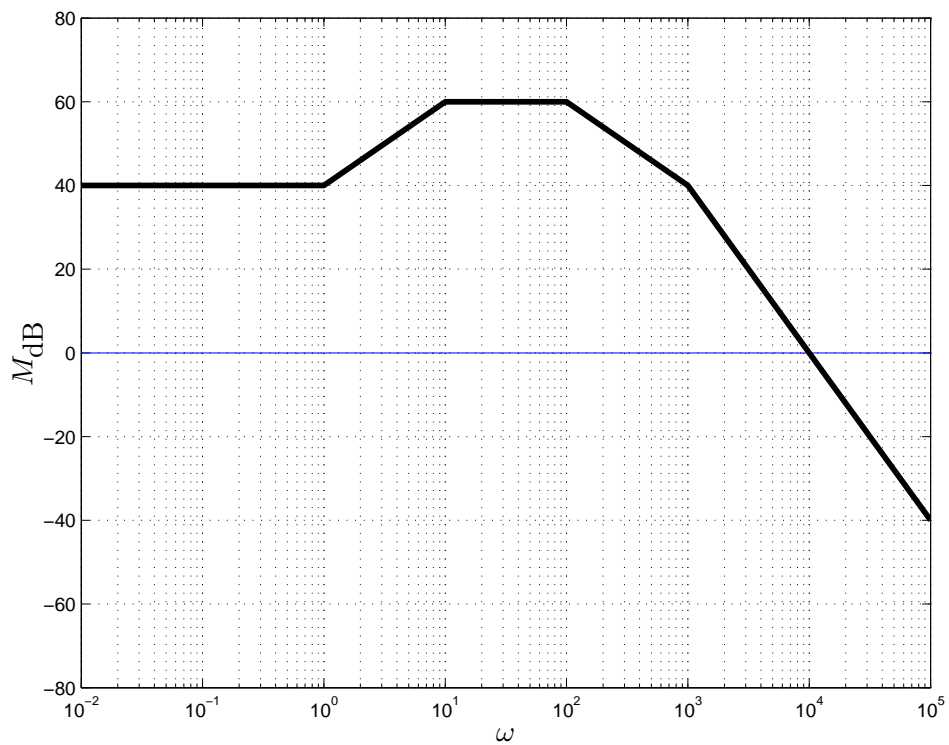
$$\dot{v}_1 = -5v_2 + 7x, \quad \dot{v}_2 = v_1 - 2v_2 - 3x, \quad y = v_2$$

b) Determine a resposta causal ao impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ (condições iniciais nulas)

3ª Questão: Determine $Y(s)$ para o sistema descrito pela equação diferencial

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

4ª Questão: a) Esboce as assíntotas de fase (em graus) do sistema linear invariante no tempo de fase mínima (pólos e zeros com parte real negativa) cujo diagrama assintótico de módulo (em dB) é mostrado abaixo.

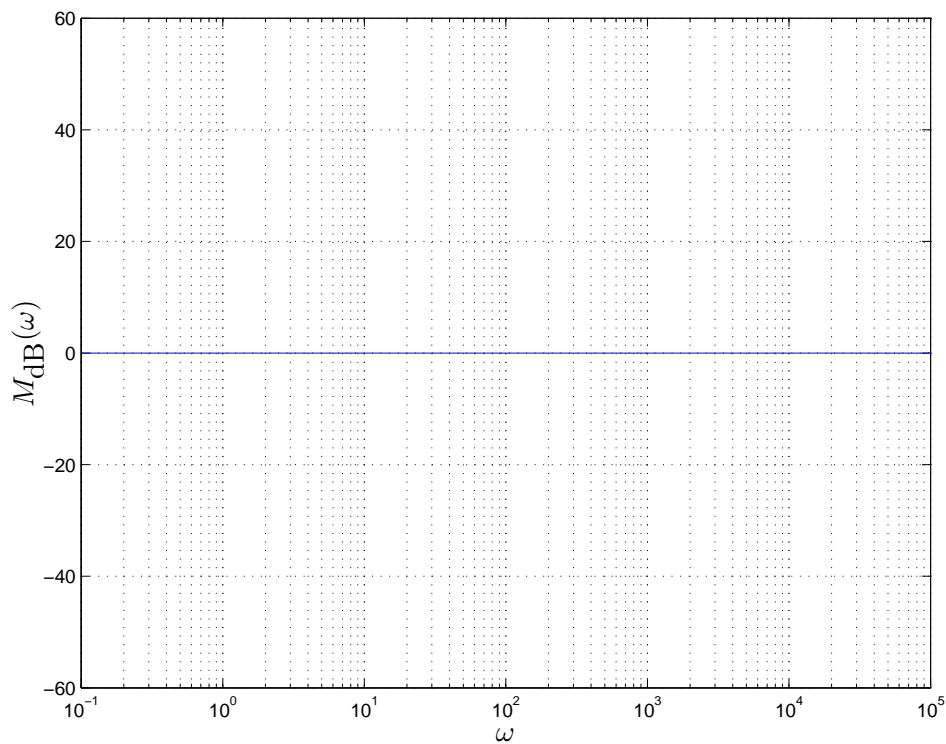


b) Determine a função de transferência $H(s)$ do sistema

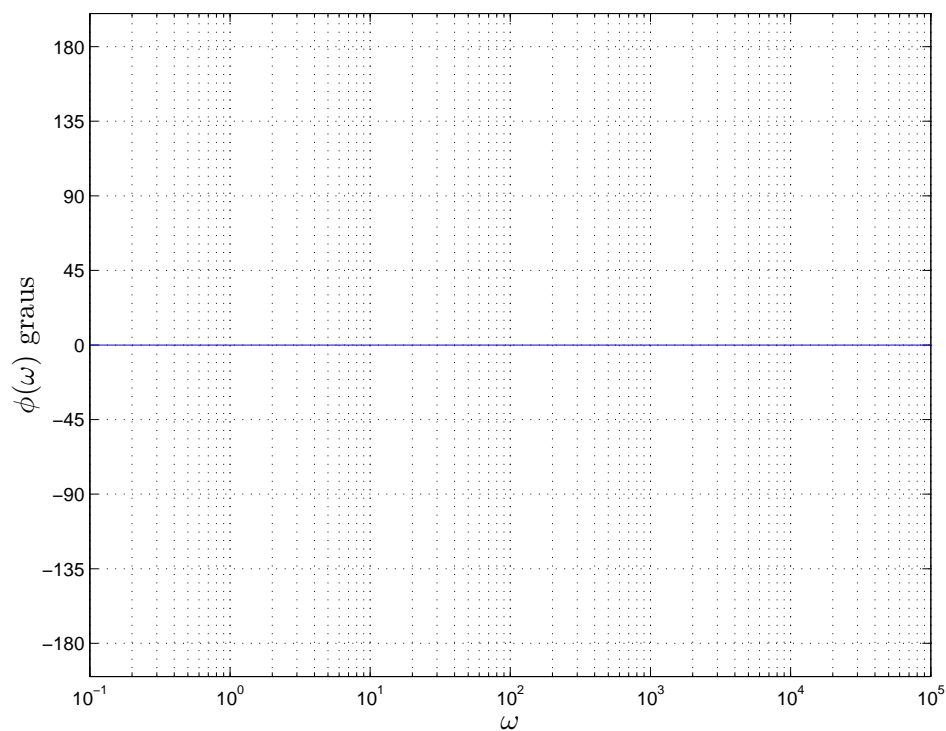


5^a Questão: a) Esboce as assíntotas do módulo (diagrama de Bode em escala logarítmica) do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência

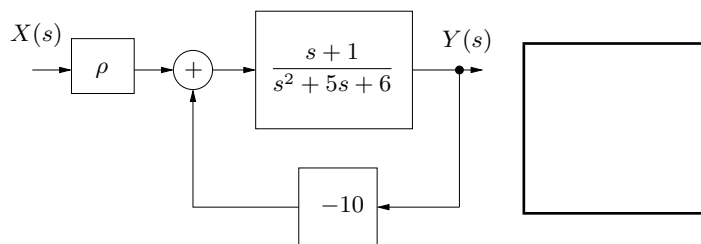
$$H(s) = \frac{10(s + 10)(s + 100)}{s(s + 1000)}$$



b) Esboce as assíntotas da fase (diagrama de Bode em graus) do sistema.



6ª Questão: Determine o valor de $\rho \in \mathbb{R}$ para que o sistema da figura ao lado apresente, em regime permanente, erro nulo para entrada degrau, isto é, quando $X(s) = 1/s$.



7ª Questão: Determine a entrada $x(t)$ sabendo que $y_f(t) = (3/2) \exp(-t) \cos(t)$ é a solução forçada da equação diferencial

$$(p^2 + 4p + 4)y(t) = x(t) \quad , \quad p = \frac{d}{dt}$$

8ª Questão: a) Determine a solução forçada da equação

$$(p^2 + 4)y(t) = \cos(2t)$$

b) Determine a solução da equação para as condições iniciais $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$

9ª Questão: a) Determine $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]u[n]\}$ para a equação a diferenças

$$y[n + 2] - 5y[n + 1] + 6y[n] = 0 \quad , \quad y[0] = 1, y[1] = 1$$

b) Determine $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$

10ª Questão: a) Determine a solução forçada da equação a diferenças

$$y[n + 1] - 2y[n] = n2^n$$

b) Determine a solução da equação a diferenças acima para $y[0] = 1$

CONSULTA

Transformada de Laplace (unilateral):

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t) \exp(-st) dt$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0) \quad , \quad s \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\left\{x^{(m)}(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right\} = s^m \mathcal{L}\{x(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} x^{(k)}(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!} \exp(-at)u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}} \quad , \quad \operatorname{Re}(s+a) > 0 \quad , \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\beta t) \exp(-at)u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \beta^2} \quad , \quad \operatorname{Re}(s+a) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\beta t) \exp(-at)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2} \quad , \quad \operatorname{Re}(s+a) > 0$$

$$x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) \quad , \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

Coefficientes a determinar (equações diferenciais)

$$D(p)y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=1}^m a_k f_k(t), \quad f_k(t) \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\exp(\lambda t)$, $t \exp(\lambda t)$, \dots , $t^{r-1} \exp(\lambda t)$ são modos próprios.

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad , \quad \text{se } \bar{D}(p)x(t) = 0 \text{ então } \bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$$

$$\text{Solução forçada: } y(t) = y_h(t) + y_f(t) \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f(t) = N(p)x(t) \quad , \quad D(p)y_h(t) = 0$$

$$y_f(t) = \sum_{k=1}^m b_k g_k(t), \quad g_k(t) \text{ modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)}$$

Resposta em Frequência: $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(-st) dt$, $H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$

Diagramas assintóticos de Bode: gráficos do módulo (em dB) e da fase (em graus) versus a frequência em escala logarítmica.

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log M(\omega) \text{ sendo log o logaritmo na base 10}$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \Rightarrow M_{\text{dB}}(\omega) = M_{1\text{dB}}(\omega) + M_{2\text{dB}}(\omega) ; \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

ω_c (frequência de corte): encontro das assíntotas de baixa e alta frequência

Pólos complexos: $0 < \xi < 1, \omega_n > 0$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow \lambda_2^* = \lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\text{pico } (0 < \xi < 1/\sqrt{2}): \omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2} ; M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Transformada Z: $\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}$, $\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$, $\mathcal{Z}\{\delta[n+m]\} = z^m$, $m \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m \mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{m-k} , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a} , \quad \mathcal{Z}\{na^n u[n]\} = \frac{az}{(z-a)^2} , \quad |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}\{n^2 a^n u[n]\} = \frac{az^2 + a^2 z}{(z-a)^3} , \quad \mathcal{Z}\left\{\binom{n+m}{m} a^n u[n]\right\} = \frac{z^{(m+1)}}{(z-a)^{(m+1)}} , \quad m \in \mathbb{N} , \quad |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}\left\{\binom{n}{m} a^{n-m} u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}} , \quad m \in \mathbb{N} , \quad |z| > |a|$$

Coefficientes a determinar (equações a diferenças)

$$D(p)y[n] = 0 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=1}^m a_k f_k[n] \quad f_k[n] \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\lambda^n, n\lambda^n, \dots, n^{r-1}\lambda^n$ são modos próprios.

$$D(p)y[n] = N(p)x[n] , \text{ se } \bar{D}(p)x[n] = 0 \text{ então } \bar{D}(p)D(p)y[n] = 0$$

$$\text{Solução forçada: } y[n] = y_h[n] + y_f[n] \Rightarrow D(p)y_f[n] = N(p)x[n] , D(p)y_h[n] = 0$$

$y_f[n]$: combinação linear dos modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)