Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado. Use três algarismos significativos. Números complexos devem ser representados na forma polar, com ângulo em radianos.

1ª Questão: Determine a solução forçada (regime permanente) para a entrada $x(t) = \cos^2(t)$ do sistema representado pela função de transferência

$$H(s) = \frac{s + 20}{s^2 + 5s + 2}$$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2ª Questão: Considere o sistema não linear contínuo no tempo dado por

$$\dot{v}_1 = v_1^2 v_2 - 2v_1^2 + x^2 - 1$$
$$\dot{v}_2 = v_1 v_2^2 + 2v_2^2 - x^3 + 1$$

a) Determine os pontos de equilíbrio e o modelo linearizado em torno dos pontos de equilíbrio, para $x = 1$

b) Determine os autovalores do sistema linearizado em torno dos pontos de equilíbrio

3ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito por

$$(p^3 + 2p^2 + 3p + 4)y(t) = (2p^3)x(t) \quad , \quad p = d/dt$$

4ª Questão: Determine uma expressão analítica para A^{-2} como combinação linear das matrizes A^q, $q = 0, 1, 2, 3$ para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

5ª Questão: Determine a solução $y(t)$, $t \geq 0$, para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} x \quad , \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 6 & 0 \end{bmatrix} v \qquad , \qquad x(t) = t$$

6ª Questão: Determine $\exp(At)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

7ª Questão: Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ cuja equação característica é $\Delta(\lambda) = (\lambda - 3)^8$. Sabendo que o *rank* da matriz $M_3 = A - 3\mathrm{I}$ é igual a 5, $M_3^4 \neq 0$ e que $M_3^5 = 0$, assinale a alternativa **incorreta**

☐ A forma de Jordan da matriz A possui três blocos.

☐ Não há blocos de Jordan de ordem 5

☐ Um bloco de Jordan é de ordem 1

☐ Um bloco de Jordan é de ordem 2

☐ Há três autovetores linearmente independentes associados ao autovalor $\lambda = 3$

$8^{\underline{a}}$ Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \; , \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 3)^3$$

b) Determine uma matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$9^{\underline{a}}$ Questão: Determine um sistema linear homogêneo, com matrizes reais, e as condições iniciais, na forma

$$\dot{\tilde{v}} = \tilde{A}\tilde{v} \; , \;\; \tilde{v}(0) = \tilde{v}_0 \; , \;\; y = \tilde{c}\tilde{v}$$

cuja solução seja a mesma do sistema

$$\dot{v} = v + 2x \; , \;\; y = 3v + 4x \; , \;\; v(0) = 5 \; , \;\; x(t) = t\cos(t)$$

$10^{\underline{a}}$ Questão: Determine a resposta ao impulso (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} x$$

CONSULTA

Variáveis de estado: $\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t)$, $y(t) = g(v(t), x(t), t)$

Pontos de equilíbrio: $\bar{v}$ tais que $f(\bar{v}, \bar{x}) = 0$, $\bar{x}$ =cte.

Sistema linear (em torno dos pontos de equilíbrio)

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \ , \ B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \ , \ C = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \ , \ D = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}}$$

$$\text{Sistemas SISO} \ \Rightarrow \ \dot{v} = Av + bx \ , \ y = cv + dx \ , \ \frac{N(p)}{D(p)} = c(p\mathrm{I} - A)^{-1}b + d = b'(p\mathrm{I} - A')^{-1}c' + d$$

$$v = T\hat{v} \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = T^{-1}AT, \ \hat{b} = T^{-1}b, \hat{c} = cT \quad , \quad T \text{ não singular}$$

A representação entrada-saída é invariante com transformações de similaridade.

$$y(t) = c\exp(At)v_0 + c\big(\exp(At)u(t)\big) * (bx(t)) + dx(t) \ , \ Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}v_0 + \big(c(s\mathrm{I} - A)^{-1}b + d\big)X(s)$$

$$\text{Cayley-Hamilton:} \quad \Delta(\lambda) = \det(s\mathrm{I} - A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(A) = 0$$

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \lambda^i \ , \ \Delta(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i A^i \ , \ f\big(\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_N)\big) = \mathrm{diag}\big(f(A_1), \ldots, f(A_N)\big)$$

$$\text{Bloco de Jordan: } J_k(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma \end{bmatrix} \ , \ f(J_k(\sigma)) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \dot{f}(\lambda) & \cdots & f^{(k-1)}(\lambda)/(k-1)! \\ 0 & f(\lambda) & \cdots & f^{(k-2)}(\lambda)/(k-2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{bmatrix}_{\lambda=\sigma}$$

Forma de Jordan de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\nu(M_\lambda) = n - \mathrm{rank}(M_\lambda)$ (dimensão do espaço nulo de $M_\lambda = A - \lambda\mathrm{I}$):

1) Para cada λ (multiplicidade algébrica n_λ), compute $M_\lambda = (A - \lambda\mathrm{I})$ e a dimensão r_λ do espaço nulo de M_λ. O número de blocos de Jordan associados a λ é igual a r_λ e a soma dos tamanhos de cada um dos blocos é igual a n_λ. Note que r_λ é a multiplicidade geométrica de λ, ou seja, o número de autovetores linearmente independentes associados a λ, $1 \leq r_\lambda \leq n_\lambda$.

2) A dimensão do maior bloco é igual ao menor k tal que $\nu(M_\lambda^k) = n_\lambda$ que é denominado k_λ. Note que $\nu(M_\lambda^k) = n_\lambda$ para $\forall k \geq k_\lambda$.

3) O número de blocos de dimensão i, $1 \leq i \leq k_\lambda$, é determinado a partir da dimensão do espaço nulo das matrizes M_λ^i. Assim, o número de blocos de dimensão i, $1 \leq i \leq k_\lambda$ pode ser determinado por

$$2\nu(M_\lambda^i) - \nu(M_\lambda^{i-1}) - \nu(M_\lambda^{i+1})$$

4) A forma de Jordan $\hat{A}$ é a matriz bloco diagonal composta pelos blocos de Jordan de cada autovalor.

5) A transformação de similaridade Q (não singular) que produz a forma de Jordan pode ser obtida do sistema linear de equações $AQ = Q\mathrm{diag}(J_{k_1}, J_{k_2}, \ldots, J_{k_r})$

$$\dot{v} = Av + bx \ , \ y = cv + dx, v(0) \quad , \quad \text{para } x \text{ solução de } x = \bar{c}\bar{v} \ , \ \dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}, \bar{v}(0)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Sistema autônomo aumentado:} \quad \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\bar{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b\bar{c} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} v(0) \\ \bar{v}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix} \quad , \quad y = \begin{bmatrix} c & d\bar{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$$