Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões nas folhas de papel almaço e copie o resultado no espaço apropriado. Use três algarismos significativos. Números complexos devem ser representados na forma polar, com ângulo em radianos.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

1ª Questão: Determine a solução forçada do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência $H(s)$ com

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 2\ , & |\omega| < 10 \\ 0\ , & |\omega| > 10 \end{cases} , \qquad \angle H(j\omega) = -\omega$$

para a entrada $x(t) = 10\cos^2(t)$

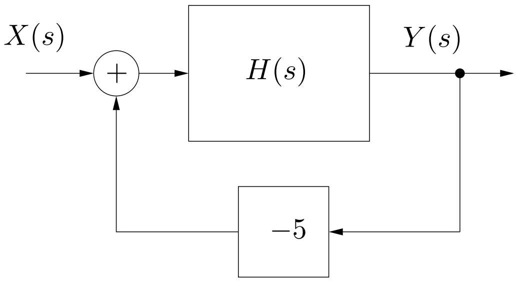
2ª Questão: Determine os valores de γ para os quais o sistema abaixo deixa de ser controlável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} x$$

3ª Questão: Assinale "F" (falso) ou "V" (verdadeiro) para as afirmações abaixo sobre o sistema linear invariante no tempo dado por

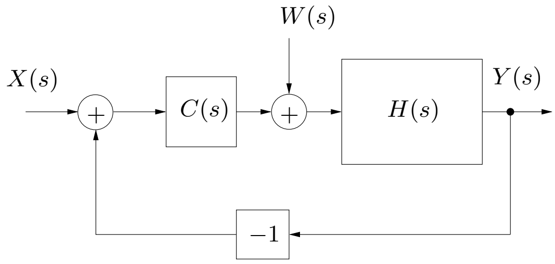
$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} x$$
$$y = \begin{bmatrix} \gamma & 1 & \delta \end{bmatrix} v$$

- O sistema é controlável e observável para quaisquer α, β, γ e δ
- O sistema é controlável para $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$
- O sistema é observável para $\gamma \neq 0$ e $\delta \neq 0$
- O sistema é observável para $\delta \neq 0$ e γ qualquer
- O sistema é controlável para $\beta \neq 0$ e α qualquer



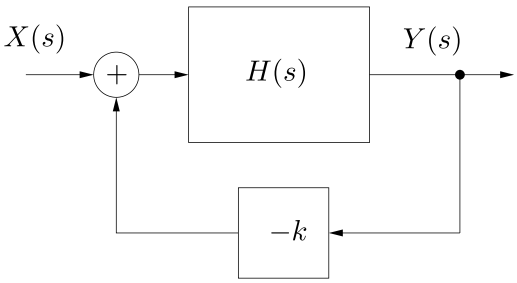
4ª Questão: Determine a sensibilidade do ganho DC ($s = 0$) do sistema em malha fechada em função do parâmetro a, para $a = 10$

$$H(s) = \frac{s^2 + a^2}{s^2 + 2s + a}$$



5ª Questão: Em relação à configuração mostrada ao lado, considerando que o sistema em malha fechada é estável, assinale "F" (falso) ou "V" (verdadeiro):

- Com entrada rampa e $W(s)$ nulo, para que o erro em regime seja nulo é preciso que $C(s)H(s)$ apresente pelo menos dois pólos na origem
- Para rejeitar perturbações $w(t)$ do tipo rampa é preciso que $C(s)H(s)$ apresente pelo menos um pólo na origem
- Com entrada rampa, para que o erro em regime seja nulo e o sistema rejeite perturbações $w(t)$ do tipo rampa é preciso que $C(s)H(s)$ apresente pelo menos dois pólos na origem
- Se $C(s)H(s)$ apresenta dois pólos na origem, então o erro em regime é nulo para $W(s) = 0$ e entradas do tipo degrau, rampa ou parábola
- Se $C(s)H(s)$ apresenta três pólos na origem, o sistema rejeita perturbações $w(t)$ do tipo degrau, rampa e parábola mas pode apresentar erro em regime para entrada do tipo parábola



6ª Questão: Determine o intervalo para k tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{s^2 - s}{4s^3 + 16s + 12} \, ,$$

7ª Questão: Usando como função de Lyapunov $\psi(v) = v^2$, mostre que o ponto de equilíbrio $v = 0$ do sistema não linear dado por

$$\dot{v} = -2v^5$$

é assintoticamente estável.

8ª Questão: Conclua (com justificativa) sobre a estabilidade assintótica do sistema linear invariante no tempo $\dot{v} = Av$, sabendo que a equação de Lyapunov

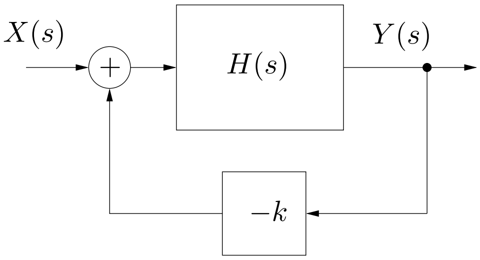
$$A'P + PA = -\mathrm{I}$$

produziu como solução única a matriz P ao lado.

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

9ª Questão: Considere o sistema realimentado mostrado na figura com

$$H(s) = \frac{s^2 - 6s + 8}{s^2 + 6s + 8} = \frac{(s-2)(s-4)}{(s+2)(s+4)}$$



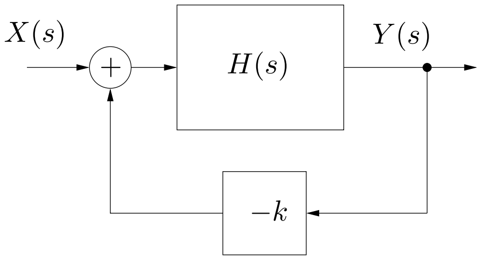
a) Esboce (nas folhas de papel almaço) o lugar das raízes para o sistema realimentado

b) Determine os pontos de cruzamento no eixo imaginário

c) Determine o valor de k nos pontos de cruzamento com o eixo imaginário

10ª Questão: Considere o sistema realimentado mostrado na figura com

$$H(s) = \frac{(s-2)(s+6)}{(s+2-2j)(s+2+2j)}$$



a) Esboce (nas folhas de papel almaço) o lugar das raízes para o sistema realimentado

b) Determine o ponto de cruzamento no eixo real

c) Determine o valor de k no ponto de cruzamento com o eixo real

Lyapunov: Considere o sistema $\dot{v} = f(v)$. O ponto de equilíbrio $\bar{v} = 0$ é assintoticamente estável se existir um domínio Ω contendo a origem e uma função escalar $\psi(v)$ diferenciável tal que

$$\psi(0) = 0 \quad , \quad \psi(v) > 0 \ \forall v \in \Omega - \{0\} \ \text{ e } \ \dot{\psi}(v) = \frac{d}{dt}\psi(v) < 0 \ \forall v \in \Omega - \{0\}$$

Lyapunov (SLIT): A solução da equação de Lyapunov $A'P + PA = -Q$, $\forall Q = Q' > 0$, é única, simétrica e definida positiva sse todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa.

Controlável se e somente se $rank\big(\text{Ctrb}(A, b)\big) = n$. Observável se e somente se $rank\big(\text{Obsv}(A, c)\big) = n$.

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad , \quad \text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \quad , \quad \text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

Decomposição canônica: $\bar{v} = Pv$

Se *rank* de $\text{Ctrb}(A, b) = r < n$, P^{-1} é formada por colunas de 1 a r LI de $\text{Ctrb}(A, b)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x \quad , \quad y = \begin{bmatrix} \bar{c}_c & \bar{c}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Se *rank* de $\text{Obsv}(A, c) = r < n$, P é formada por linhas de 1 a r LI de $\text{Obsv}(A, c)$ mais vetores LI

Sensibilidade de $f(x, y)$ em relação a x: $\dfrac{x}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Lugar das Raízes: $1 + kH(s) = 0$, $H(s) = N(s)/D(s) \ \Rightarrow \ D(s) + kN(s) = 0$

$$D(s) = \sum_{r=0}^{m} \alpha_r s^r \ , \ \alpha_m = 1 \quad , \quad N(s) = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r s^r$$

1) Simetria em relação ao eixo real.

2) Os pólos e os zeros (finitos) de malha aberta fazem parte do lugar das raízes para, respectivamente, $k = 0$ e $k \to +\infty$.

3) Condição de fase: $\displaystyle\sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) = \pi$

sendo $\phi_r(s) = \angle(s-\lambda_r)$ o ângulo do vetor do pólo λ_r até o ponto s do lugar das raízes e $\varphi_r(s) = \angle(s-\gamma_r)$ o ângulo do vetor do zero γ_r até o ponto s do lugar das raízes.

4) Condição de módulo: $\displaystyle k = \Big(\prod_{r=1}^{m} |s - \lambda_r|\Big)\Big/\Big(\prod_{r=1}^{\ell} |s - \gamma_r|\Big)$

5) Eixo real: O lugar das raízes no eixo real está sempre à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros reais.

6) Ângulo de partida dos pólos: $\displaystyle \phi_i(s)\Big|_{s\approx\lambda_i} = \pi + \sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{m} \phi_r(s)$

7) Ângulo de chegada aos zeros: $\displaystyle \varphi_i(s)\Big|_{s\approx\gamma_i} = \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{\ell} \varphi_r(s)$

8) O número de assíntotas η é igual ao número de zeros no infinito, isto é, $\eta = m - \ell$

9) Ângulos das assíntotas: $\dfrac{\pi(1 + 2r)}{m - \ell} \quad , \quad \beta_\ell > 0 \quad , \quad r \in \mathbb{Z}$

10) Encontro das assíntotas ($\eta \geq 2$): no eixo real no ponto $\displaystyle \frac{1}{\eta}\left(\sum_{r=1}^{m} \text{Re}(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{\ell} \text{Re}(\gamma_r)\right)$

11) Cruzamento com o eixo real: Os pontos do lugar das raízes de chegada ou partida do eixo real, quando existem, satisfazem a equação $N(s)\dot{D}(s) = D(s)\dot{N}(s)$

12) Cruzamento com o eixo imaginário: ocorrem em $s = \pm j\omega$, com $\omega \geq 0$, solução de $D(s)+kN(s) = 0$