EA616 — Análise Linear de Sistemas

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2^o Semestre 2011: Aula 2 — Resolução de equações diferenciais por Laplace

Tópicos

- Modelos matemáticos
- Sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT)
- Função de transferência
- Autofunção

Notação: x é a entrada, y é a saída e $p = d/dt$ (operador derivada)

$$D(p)y = N(p)x \quad , \quad D(p) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k \; , \quad \alpha_m = 1 \quad , \quad N(p) = \sum_{k=0}^{\ell} \beta_k p^k$$

SLIT: autofunção $x(t) = \exp(st)$, $s \in \mathbb{C}$ $\quad \Rightarrow \quad$ $y(t) = H(s)\exp(st)$

SLIT: $y(t) = h(t) * x(t)$ ($h(t)$ é a resposta ao impulso)

Função de transferência: transformada de Laplace da resposta ao impulso

Notação: $u(t)$ é o degrau, $\delta(t)$ é o impulso

$$\delta(t) = pu(t), \quad u(t) = \mathscr{I}_\delta(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\beta)d\beta$$

Para a classe de funções $x(t)$ à direita, define-se a transformada unilateral de Laplace

$$\mathscr{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt = \int_{0}^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt$$

Transformada da derivada

$$\mathscr{L}\{\dot{y}\} = sY(s) - y(0)$$

$$\mathscr{L}\{\ddot{y}\} = s\big(sY(s) - y(0)\big) - \dot{y}(0) = s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$$

Decomposição em frações parciais

Transformada de Laplace: pares úteis

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1,\ \mathscr{L}\left\{\frac{d^m}{dt^m}\delta(t)\right\} = s^m,\ \mathscr{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{t^m}{m!}\exp(-at)u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}}\ ,\quad \mathrm{Re}(s+a) > 0\ ,\ m \in \mathbb{N}$$

$$\mathscr{L}\{\cos(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2}\ ,\ \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

$$\mathscr{L}\{\sin(\beta t)\exp(-at)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2}\ ,\ \mathrm{Re}(s+a) > 0$$

E02 (data, RA, nome, EA616, Turma, Prof.)

a) Determine a resposta causal ao impulso (condições iniciais nulas) do SLIT dado por

$$(p^2 + 5p + 6)y = (2p + 1)x$$

b) Determine a resposta causal ao degrau (condições iniciais nulas)

c) Determine a resposta causal ao impulso (condições iniciais nulas) do SLIT dado por

$$H(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5}$$