EA616 — Análise Linear de Sistemas

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2^o Semestre 2011: Aula 26 — Estabilidade 1/2

Estabilidade

- Interna: estabilidade dos pontos de equilíbrio. Análise pelo modelo linear nos pontos de equilíbrio, ou por funções de Lyapunov;
- Externa: estabilidade da relação entrada-saída. BIBO (*Bounded Input, Bounded Output*) estabilidade

BIBO-estabilidade: Definição

$$|x(t)| < b \quad \Rightarrow \quad |y(t)| < +\infty$$

BIBO-estabilidade: propriedades

- Um sistema linear invariante no tempo é BIBO estável se e somente se sua resposta ao impulso $h(t)$ for absolutamente integrável;
- Um sistema linear invariante no tempo é BIBO estável se e somente $s = j\omega \in \Omega_h$ (isto é, $s = j\omega$ pertence ao domínio de existência de $H(s) = \mathscr{L}\{h(t)\}$)
- Um sistema linear invariante no tempo descrito por $H(s) = N(s)/D(s)$ é BIBO estável se e somente todos os pólos (isto é, raízes de $D(s) = 0$) tiverem parte real negativa.

Definição

$D(p)$ é um polinômio Hurwitz se todas as raízes possuem parte real negativa.

Uma condição necessária para que $D(p)$ de grau m, com $\alpha_m > 0$, seja Hurwitz, é que todos os demais m coeficientes sejam positivos.

Como o cálculo de todas as raízes pode ser numericamente difícil e dispendioso quando deseja-se determinar apenas se o polinômio é Hurwitz ou não, foram desenvolvidos métodos para determinar o sinal da parte real das raízes sem precisar calcular todas as raízes.

$$D(p) = D_m(p) + D_{m-1}(p)$$

$$D_m(p) = \alpha_m p^m + \alpha_{m-2} p^{m-2} + \cdots, D_{m-1}(p) = \alpha_{m-1} p^{m-1} + \alpha_{m-3} p^{m-3} + \cdots$$

$$\frac{D_m(p)}{D_{m-1}(p)} = \sigma_1 p + \cfrac{1}{\sigma_2 p + \cfrac{1}{\sigma_3 p + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\sigma_{m-1} p + \cfrac{1}{\sigma_m p}}}}}$$

Todas as raízes de $D(p) = 0$ possuem parte real negativa se e somente se $\sigma_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$.

Determinantes de Hurwitz

O polinômio de grau m, $\alpha_m > 0$ dado por

$$D(p) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k$$

possui todas as raízes com parte real negativa se e somente se os determinantes $\det(\Delta_k)$ (menores principais líderes de Δ_m) forem maiores que zero para $k = 1, \ldots, m$, com

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{m-1} \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{m-1} & \alpha_m \\ \alpha_{m-3} & \alpha_{m-2} \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} \alpha_{m-1} & \alpha_m & 0 \\ \alpha_{m-3} & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1} \\ \alpha_{m-5} & \alpha_{m-4} & \alpha_{m-3} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_m = \begin{bmatrix} \alpha_{m-1} & \alpha_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{m-3} & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1} & \alpha_m & \cdots & 0 \\ \alpha_{m-5} & \alpha_{m-4} & \alpha_{m-3} & \alpha_{m-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

Considere o polinômio

$$\alpha_5 p^5 + \alpha_4 p^4 + \alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 \quad , \quad \alpha_k > 0 \ , \ k = 0, \ldots, 5$$

Todas as raízes possuem parte real negativa se e somente se todos os elementos da tabela forem positivos ou, equivalentemente, se todos os elementos da primeira coluna forem positivos. A ocorrência de um zero ou de um número negativo implica que o polinômio não é Hurwitz (ou seja, não possui todas as raízes com parte real negativa).

O resultado (em termos do sinal da parte real das raízes) não se altera se uma linha da tabela for multiplicada por um número positivo.

p^5	α_5	α_3	α_1
p^4	α_4	α_2	α_0
p^3	$\beta_3 = \dfrac{(\alpha_3\alpha_4 - \alpha_2\alpha_5)}{\alpha_4}$	$\beta_1 = \dfrac{(\alpha_1\alpha_4 - \alpha_0\alpha_5)}{\alpha_4}$	
p^2	$\gamma_2 = \dfrac{(\alpha_2\beta_3 - \beta_1\alpha_4)}{\beta_3}$	$\gamma_0 = \alpha_0$	
p^1	$\delta_1 = \dfrac{(\beta_1\gamma_2 - \gamma_0\beta_3)}{\gamma_2}$		
p^0	$\varepsilon_0 = \alpha_0$		

Note que o elemento da linha associada a p^0 é sempre igual a α_0

Se não ocorrer nenhum zero na primeira coluna da tabela de Routh, o número de mudanças de sinal na primeira coluna é igual ao número de raízes do polinômio com parte real positiva.

A ocorrência de um zero indica que o polinômio não é Hurwitz e a tabela não pode ser completada. Nesses casos, duas técnicas podem ser utilizadas:

i) trocar o zero por ε, completar a tabela e estudar o sinal dos coeficientes quando $\varepsilon \to 0^+$ e $\varepsilon \to 0^-$ (número distinto de trocas de sinal para $\varepsilon \to 0^+$ e $\varepsilon \to 0^-$ indica raiz com parte real nula);

ii) estudar o polinômio $D(1/p)p^m$ (isto é, o polinômio definido pelos coeficientes lidos na ordem inversa), que possui o mesmo número de raízes com parte real positiva que $D(p)$, pois se λ_k, $k = 1, \dots, m$ são as raízes de $D(p)$, tem-se

$$D(1/p)p^m = \prod_{k=1}^{m} (1/p - \lambda_k)p = \prod_{k=1}^{m} (1 - \lambda_k p)$$

cujas raízes são $1/\lambda_k$. Note que se para raízes complexas, por exemplo, $\lambda = \alpha + j\beta$, o sinal da parte real não se altera.

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha - j\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

E26 (data, RA, nome, EA616, Turma, Prof.)

Determine k para que o sistema linear invariante no tempo descrito por

$$H(s) = \frac{1}{4s^4 + 8s^3 + 12s^2 + 4ks + 5}$$

seja BIBO-estável.