

EA616 — Análise Linear de Sistemas

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2º Semestre 2011: Aula 9 — Equações a diferenças por Transformada Z

Tópicos

- Modelos matemáticos
- Sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT)
- Função de transferência
- Autofunção

Notação: $x[n]$ é a entrada, $y[n]$ é a saída, $n \in \mathbb{Z}$

p é o operador deslocamento ($px[n] = x[n+1]$)

$$D(p)y[n] = N(p)x[n] , \quad D(p) = \sum_{k=0}^m \alpha_k p^k , \quad \alpha_m = 1 , \quad N(p) = \sum_{k=0}^{\ell} \beta_k p^k$$

SLIT: autofunção $x[n] = z^n$, $z \in \mathbb{C} \Rightarrow y[n] = H(z)z^n$

SLIT: $y[n] = h[n] * x[n]$ ($h[n]$ é a resposta ao impulso)

Função de transferência: transformada Z da resposta ao impulso

Notação: $u[n]$ é o degrau, $\delta[n]$ é o impulso

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1], \quad u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

Sinais $x[n]$ tais que $x[n] = 0, n < 0$ podem ser denotados por $x[n]u[n]$

$$\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k]z^{-k}$$

$$\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1, \quad \mathcal{Z}\{\delta[n+m]\} = z^m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|, \quad \mathcal{Z}\{u[n]\} = \frac{z}{z-1}, |z| > 1$$

$$\mathcal{L}\{x[n+1]u[n]\} = z\mathcal{L}\{x[n]u[n]\} - zx[0]$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x[n+2]u[n]\} &= z(z\mathcal{L}\{x[n]u[n]\} - zx[0]) - zx[1] \\ &= z^2\mathcal{L}\{x[n]u[n]\} - z^2x[0] - zx[1]\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{x[n+m]u[n]\} = z^m\mathcal{L}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{m-k}, \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

Decomposição em frações parciais e transformada Z inversa

Combinatória com deslocamento

$$\mathcal{L} \left\{ \binom{n}{m} a^{n-m} u[n] \right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{N}, |z| > |a|$$

Pares e propriedades

$$\mathcal{L} \{ na^n u[n] \} = \frac{az}{(z-a)^2}, \quad \mathcal{L} \{ n^2 a^n u[n] \} = \frac{az^2 + a^2 z}{(z-a)^3}, \quad |z| > |a|$$

$$\mathcal{L} \left\{ \binom{n+m}{m} a^n u[n] \right\} = \frac{z^{(m+1)}}{(z-a)^{(m+1)}}, \quad m \in \mathbb{N}, |z| > |a|$$

$$\mathcal{L} \{ nx[n] \} = -z \frac{d}{dz} \mathcal{L} \{ x[n] \}$$

E09 (data, RA, nome, EA616, Turma, Prof.)

Determine $y[n]$, $n \geq 0$ solução da equação

$$y[n+1] - 2y[n] = x[n], \quad y[0] = 0, \quad \mathcal{L}\{x[n]u[n]\} = \frac{3z^2 - 5z}{(z-1)(z-2)}, \quad |z| > 2$$