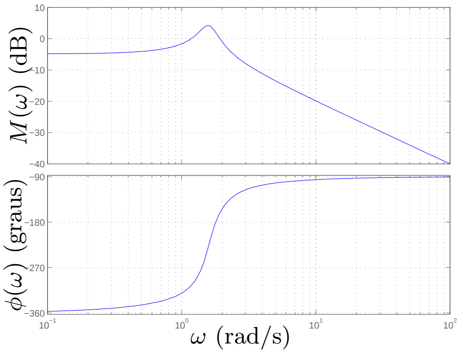
1ª Questão: Determine (com valores aproximados, obtidos do diagrama) a saída persistente (i.e., em regime permanente) para a entrada $x(t) = 50\ \mathrm{sen}(10t)$ do sistema estável dado pelo diagrama de Bode (módulo em dB e fase em graus) abaixo. Obs.: $M(\omega)_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10} M(\omega)$



$$M(10) \approx -20\,\mathrm{dB} = 0.1,\ \phi(10) \approx -92\,\mathrm{graus}$$

$$y_f(t) = 5\ \mathrm{sen}(10t - 95^o)$$

2ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio para $x = 1$ do sistema não linear

$$\dot{v} = v^2 - x^2, \quad v \in \mathbb{R}$$

$$(1), \quad (-1)$$

b) Determine o sistema linearizado (matriz A e vetor b) nos pontos de equilíbrio

$$A = \begin{bmatrix}2v\end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix}-2x\end{bmatrix}$$
$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \begin{bmatrix}-2\end{bmatrix}, \quad (1):\ A = \begin{bmatrix}2\end{bmatrix}, \quad (-1):\ A = \begin{bmatrix}-2\end{bmatrix}$$

3ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial, completando nas matrizes

$$(p^3 + 3p^2 - 2p - 1)y(t) = (5p^3 + 21p^2 - 5p - 1)x(t),\ p = \frac{d}{dt}$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix}5\end{bmatrix}$$

4ª Questão: Considere o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix}-9 & -20\\ 1 & 0\end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} v$$

a) Determine $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, isto é, a transformada de Laplace de $y(t)$

b) Usando a transformada inversa de Laplace, determine $y(t)$

$$Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}v(0) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+9 & 20\\ -1 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{s-20}{s^2+9s+20} = \frac{25}{s+5} - \frac{24}{s+4}$$
$$\Rightarrow \quad y(t) = \big(25\exp(-5t) - 24\exp(-4t)\big)u(t)$$

5ª Questão: Determine uma matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A^{-1} + A^{-2} = \alpha\mathrm{I} + A$

$$A^3 + \alpha A^2 - A - \mathrm{I} = 0, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

6ª Questão: Determine a forma de Jordan da matriz $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ que satisfaz as seguintes propriedades: i) A possui o autovalor ξ com multiplicidade algébrica igual a 5; ii) A multiplicidade geométrica do autovalor ξ é igual a 4;

$$J = \mathrm{diag}\big(J_1(\xi), J_1(\xi), J_1(\xi), J_2(\xi)\big)$$

7ª Questão: Determine a solução $v(t)$ para o sistema $\dot{v} = Av$, dados

$$v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{v} = Pv, \quad \bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v} = \exp(\bar{A}t)Pv(0), \quad v = P^{-1}\bar{v} = P^{-1}\exp(\bar{A}t)Pv(0)$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-t) & t\exp(-t) & t^2\exp(-t)/2 \\ 0 & \exp(-t) & t\exp(-t) \\ 0 & 0 & \exp(-t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \exp(-t) + t^2\exp(-t) + t\exp(-t) \\ -2t\exp(-t) + \exp(-t) \\ \exp(-t) - t^2\exp(-t) - t\exp(-t) \end{bmatrix}$$

8ª Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz
b) Determine uma matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad Q_{geral} = \begin{bmatrix} a & c \\ -2a & a-2c \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}\ ,\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0\ ,\ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função $y(t) = 20t\exp(2t)\cos(3t) + 10\exp(2t)\mathrm{sen}(3t)$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

10ª Questão: Determine a solução $y(t)$, $t \geq 0$, do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 25 & 84 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(t) = 5tu(t)$$

$$H(s) = 12\frac{7s+24}{s^2+7s+12} = 12\frac{7s+24}{(s+3)(s+4)}, \quad Y(s) = H(s)\frac{5}{s^2} = \frac{120}{s^2} - \frac{35}{s} + \frac{20}{s+3} + \frac{15}{s+4}$$

$$y(t) = \big(120t - 35 + 20\exp(-3t) + 15\exp(-4t)\big)u(t)$$