

Nome:

RA:

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1ª Questão: Determine a solução forçada do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{240}{s^2 + 16}$$

para a entrada $x(t) = \exp(j2t) + \cos(2t)$

2ª Questão: Determine os valores de c_1 e c_2 para os quais o sistema abaixo deixa de ser observável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} v, \quad y = [c_1 \quad c_2] v$$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

3ª Questão: Assinale “F” (falso) ou “V” (verdadeiro) para as afirmações abaixo sobre o sistema linear invariante no tempo dado por

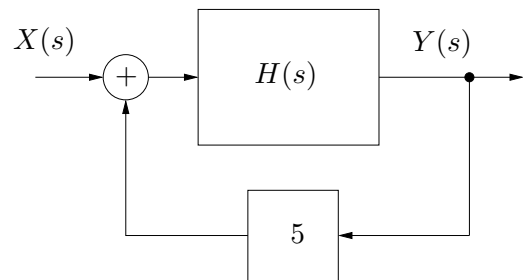
$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} x$$

$$y = [\alpha \quad \beta \quad 1] v$$

- O sistema é controlável para $\beta \neq 0$
- O sistema é controlável para $\alpha \neq 0$
- O sistema não é controlável nem observável para $\alpha = 0$ e β qualquer
- O sistema é observável para $\beta \neq 0$

4ª Questão: Determine a sensibilidade do ganho DC ($s = 0$) do sistema em malha fechada em função do parâmetro a , para $a = 10$

$$H(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 8s + 2a}$$



5ª Questão: Considere o sistema (A, b, c, d) abaixo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

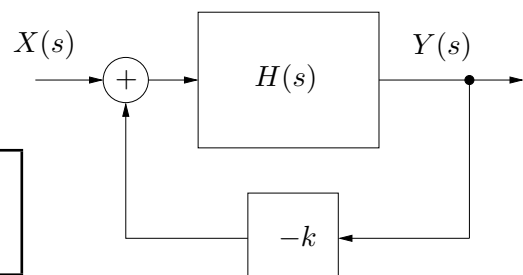
$$c = [9 \quad -13 \quad 2 \quad 7 \quad 8 \quad 4], \quad d = [0]$$

a) Determine os modos (autovalores) controláveis e os não controláveis

b) Determine a função de transferência

6ª Questão: Determine o intervalo para k tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{s^2 + s + 58}{s^3 + 7s^2 + 12s + 10}$$



7ª Questão: Usando como função de Lyapunov $\psi(v) = v^2$, determine um conjunto Ω no espaço de estados no qual a função $\psi(v)$ garante a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $v = 0$ do sistema não linear dado por

$$\dot{v} = v^3 - 5v$$

8ª Questão: Conclua (com justificativa) sobre a estabilidade assintótica do sistema linear invariante no tempo $\dot{v} = Av$, sabendo que a equação de Lyapunov

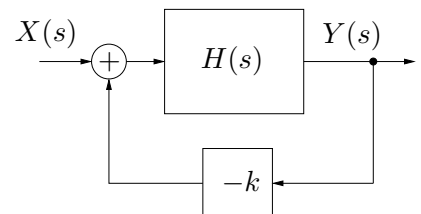
$$A'P + PA = -I$$

produziu como solução única a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

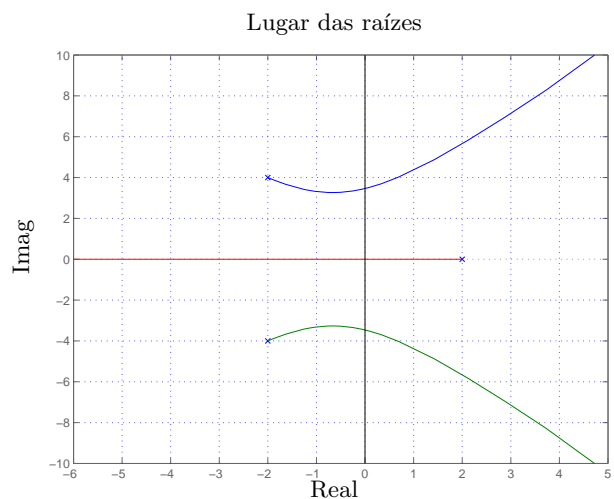
9ª Questão: Considere o sistema realimentado mostrado na figura com

$$H(s) = \frac{s^2 - 4s + 3}{s^4 + 3s^3 - 2s^2 - 12s - 8} = \frac{(s-1)(s-3)}{(s+2)^2(s+1)(s-2)}$$



Esboce (nas folhas de papel almaço) o lugar das raízes para o sistema realimentado (eixo real e assíntotas), determinando o ponto de encontro das assíntotas

10ª Questão: No lugar de raízes mostrado na figura, com pólos em 2 e $-2 \pm 4j$, considerando que os cruzamentos com o eixo imaginário ocorrem em 0 e (aproximadamente) em $\pm 4j$, determine o intervalo para o ganho k que garante a estabilidade do sistema em malha fechada.



Lyapunov: Considere o sistema $\dot{v} = f(v)$. O ponto de equilíbrio $\bar{v} = 0$ é assintoticamente estável se existir um domínio Ω contendo a origem e uma função escalar $\psi(v)$ diferenciável tal que

$$\psi(0) = 0 \quad , \quad \psi(v) > 0 \quad \forall v \in \Omega - \{0\} \quad \text{e} \quad \dot{\psi}(v) = \frac{d}{dt}\psi(v) < 0 \quad \forall v \in \Omega - \{0\}$$

Lyapunov (SLIT): A solução da equação de Lyapunov $A'P + PA = -Q$, $\forall Q = Q' > 0$, é única, simétrica e definida positiva sse todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa.

Controlável se e somente se $\text{rank}(\text{Ctrb}(A, b)) = n$. Observável se e somente se $\text{rank}(\text{Obsv}(A, c)) = n$.

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad , \quad \text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \quad , \quad \text{Ctrb}(A, b) = [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b]$$

Decomposição canônica: $\bar{v} = Pv$

Se rank de $\text{Ctrb}(A, b) = r < n$, P^{-1} é formada por colunas de 1 a r LI de $\text{Ctrb}(A, b)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x \quad , \quad y = [\bar{c}_c \quad \bar{c}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Se rank de $\text{Obsv}(A, c) = r < n$, P é formada por linhas de 1 a r LI de $\text{Obsv}(A, c)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_o \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_o \\ \bar{b}_{\bar{o}} \end{bmatrix} x \quad , \quad y = [\bar{c}_o \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Sensibilidade de $f(x, y)$ em relação a x : $\frac{x}{f} \frac{\partial f}{\partial x}$

Lugar das Raízes: $1 + kH(s) = 0$, $H(s) = N(s)/D(s) \Rightarrow D(s) + kN(s) = 0$

$$D(s) = \sum_{r=0}^m \alpha_r s^r \quad , \quad \alpha_m = 1 \quad , \quad N(s) = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r s^r$$

1) Simetria em relação ao eixo real.

2) Os pólos e os zeros (finitos) de malha aberta fazem parte do lugar das raízes para, respectivamente, $k = 0$ e $k \rightarrow +\infty$.

3) Condição de fase: $\sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1}^m \phi_r(s) = \pi$

sendo $\phi_r(s) = \angle(s - \lambda_r)$ o ângulo do vetor do pólo λ_r até o ponto s do lugar das raízes e $\varphi_r(s) = \angle(s - \gamma_r)$ o ângulo do vetor do zero γ_r até o ponto s do lugar das raízes.

4) Condição de módulo: $k = \left(\prod_{r=1}^m |s - \lambda_r| \right) / \left(\prod_{r=1}^{\ell} |s - \gamma_r| \right)$

5) Eixo real: O lugar das raízes no eixo real está sempre à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros reais.

6) Ângulo de partida dos pólos: $\phi_i(s) \Big|_{s \approx \lambda_i} = \pi + \sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1, r \neq i}^m \phi_r(s)$

7) Ângulo de chegada aos zeros: $\varphi_i(s) \Big|_{s \approx \gamma_i} = \sum_{r=1}^m \phi_r(s) - \sum_{r=1, r \neq i}^{\ell} \varphi_r(s)$

8) O número de assíntotas η é igual ao número de zeros no infinito, isto é, $\eta = m - \ell$

9) Ângulos das assíntotas: $\frac{\pi(1 + 2r)}{m - \ell}$, $\beta_{\ell} > 0$, $r \in \mathbb{Z}$

10) Encontro das assíntotas ($\eta \geq 2$): no eixo real no ponto $\frac{1}{\eta} \left(\sum_{r=1}^m \text{Re}(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{\ell} \text{Re}(\gamma_r) \right)$

11) Cruzamento com o eixo real: Os pontos do lugar das raízes de chegada ou partida do eixo real, quando existem, satisfazem a equação $N(s)\dot{D}(s) = D(s)\dot{N}(s)$

12) Cruzamento com o eixo imaginário: ocorrem em $s = \pm j\omega$, com $\omega \geq 0$, solução de $D(s) + kN(s) = 0$