Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1ª Questão: a) Determine a função de transferência do sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$\ddot{y} + 9y = \ddot{x} + 4x$$

b) Determine a solução forçada $y_f(t)$ quando a entrada é $x(t) = \text{sen}(t) + \cos(2t)$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2ª Questão: Determine a resposta ao impulso (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

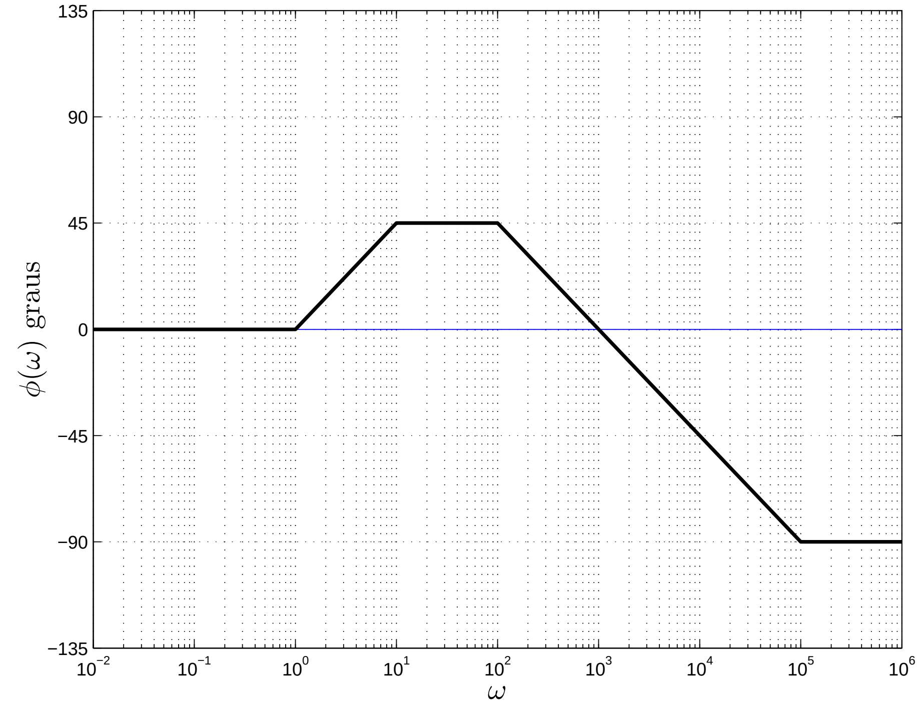
$$\underbrace{(p^3 + p^2 + 4p + 4)}_{(p^2+4)(p+1)} y = (-2p^2 + 10p + 2)x, \quad p = \frac{d}{dt}$$

3ª Questão: a) Determine a transformada unilateral de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, sendo $y(t)$ a solução da equação diferencial abaixo com $x(t) = 0$

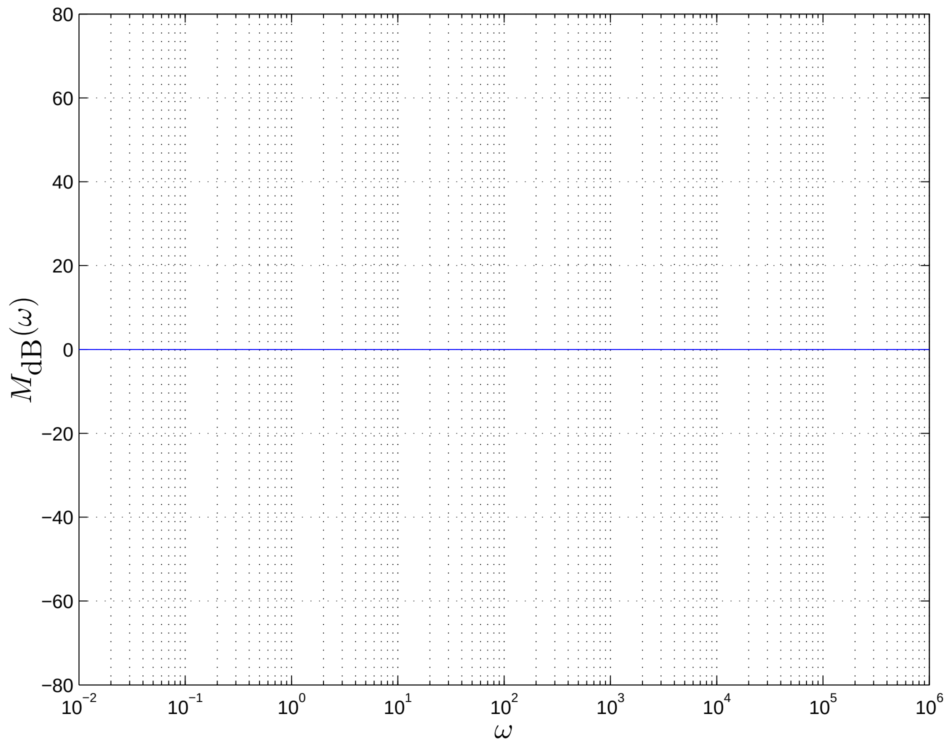
$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = x, \quad y(0),\ \dot{y}(0) \text{ dados}$$

b) Determine $y(t)$, para $y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = -6$

4ª Questão: Considere as assíntotas da fase (diagrama de Bode em graus) em escala logarítmica da função de transferência de um sistema linear invariante no tempo de fase mínima da figura abaixo.



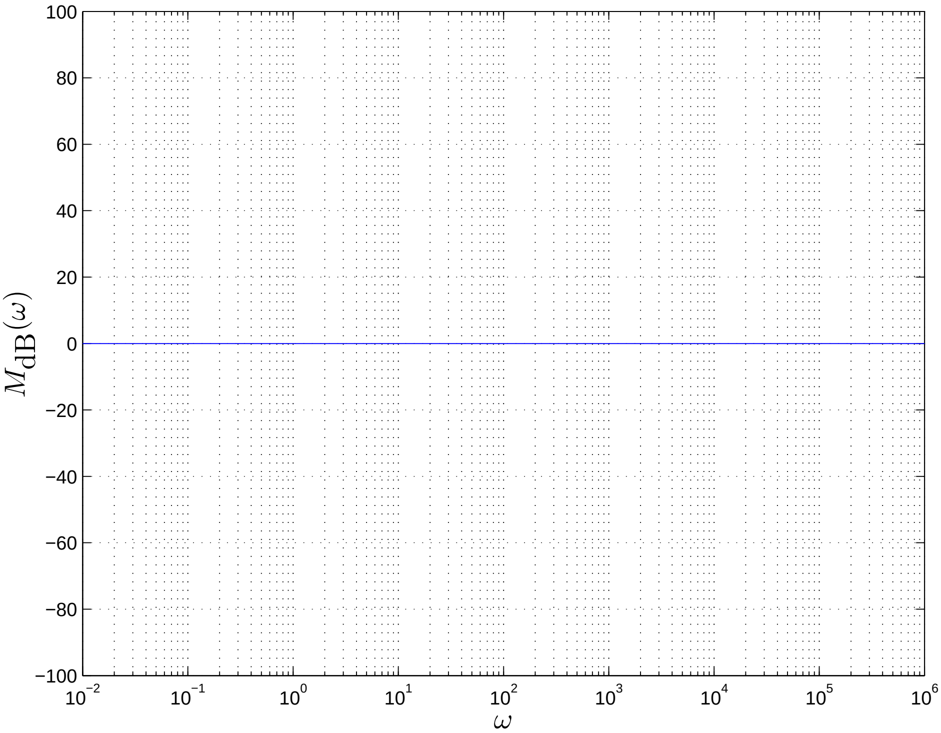
a) Sabendo que o ganho DC é 40 dB, esboce as assíntotas de módulo (em dB) do diagrama de Bode



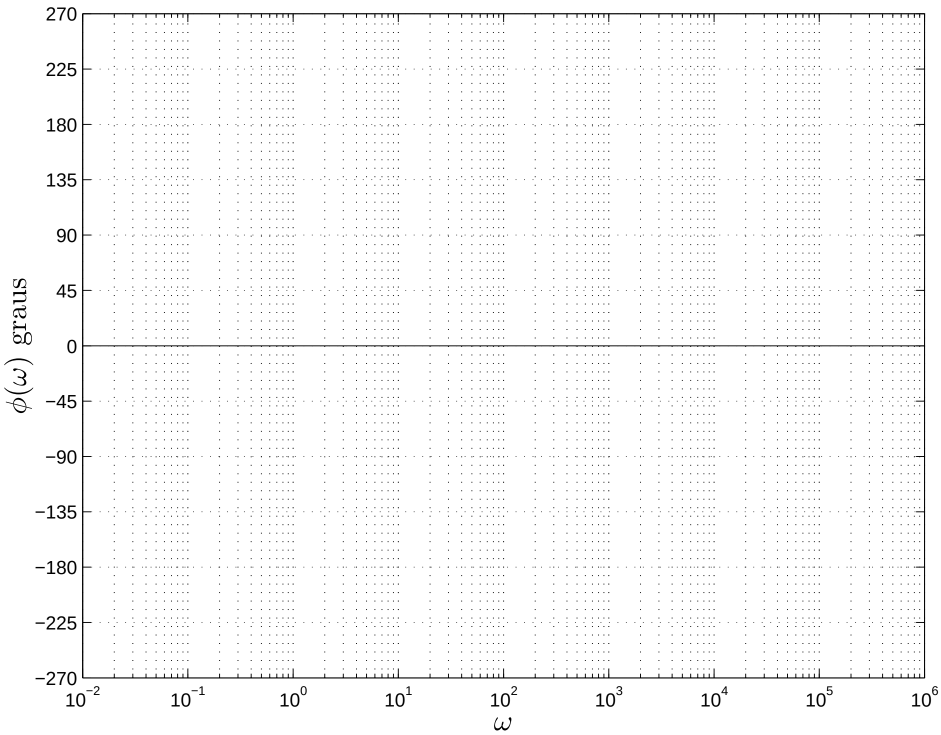
b) Baseando-se nos diagramas assintóticos de módulo e fase, determine a solução forçada do sistema para a entrada $x(t) = \cos(1000t)$

5ª Questão: a) Esboce as assíntotas do módulo (diagrama de Bode em escala logarítmica) do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{(s+10)(s+1000)}{100s(s+1)}$$



b) Esboce as assíntotas da fase (diagrama de Bode em graus) do sistema.



6ª Questão: Determine a solução forçada quando a entrada é dada por $x(t) = \exp(-3t)$ para o sistema linear invariante no tempo cuja resposta ao impulso é dada por

$$h(t) = (\exp(-3t)u(t)) * (\exp(-3t)u(t))$$

7ª Questão: Determine a equação diferencial homogênea e as condições iniciais que produzem como solução

$$y(t) = t\cos(2t)$$

8ª Questão: Determine a solução $y(t)$ da equação diferencial

$$p(p+1)y = -\cos(t) - \text{sen}(t), \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0, \quad p = \frac{d}{dt}$$

9ª Questão: a) Determine $Y(z)$, isto é, a transformada Z da solução da equação a diferenças abaixo

$$y[n+2] + 4y[n+1] + 3y[n] = 0, \qquad y[0] = 1, \quad y[1] = 3$$

b) Determine a solução $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$

10ª Questão: a) Determine a solução forçada $y_f[n]$ da equação a diferenças

$$(p-5)y[n] = n5^{n+1}, \quad py[n] = y[n+1]$$

b) Determine a solução para $y[0] = 1/2$

$$u(t)\ \text{(função degrau)},\quad \delta(t)\ \text{(função impulso)},\quad \delta(t)=\frac{d}{dt}u(t),\quad u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\beta)d\beta$$

Transformada de Laplace (unilateral):

$$\mathcal{L}\{x(t)\}=\int_0^{+\infty}x(t)\exp(-st)dt,\qquad \mathcal{L}\{\delta(t)\}=1,\quad \mathcal{L}\{u(t)\}=\frac{1}{s},\ \operatorname{Re}(s)>0$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\}=s\mathcal{L}\{x(t)\}-x(0),\quad \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\}=s^2\mathcal{L}\{x(t)\}-sx(0)-\dot{x}(0),\quad s\in\Omega_x$$

$$\mathcal{L}\left\{x^{(m)}(t)=\frac{d^m x(t)}{dt^m}\right\}=s^m\mathcal{L}\{x(t)\}-\sum_{k=0}^{m-1}s^{m-k-1}x^{(k)}(0)$$

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{t^m}{m!}\exp(-at)u(t)\Big\}=\frac{1}{(s+a)^{m+1}}\ ,\quad \operatorname{Re}(s+a)>0\ ,\ m\in\mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\beta t)\exp(-at)u(t)\}=\frac{s+a}{(s+a)^2+\beta^2}\quad ,\ \operatorname{Re}(s+a)>0$$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(\beta t)\exp(-at)u(t)\}=\frac{\beta}{(s+a)^2+\beta^2}\quad ,\ \operatorname{Re}(s+a)>0$$

$$x(0^+)=\lim_{t\to 0^+}x(t)=\lim_{s\to+\infty}sX(s)\ ,\qquad \lim_{t\to+\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}sX(s)$$

Coeficientes a determinar (equações diferenciais)

$$D(p)y(t)=0\quad\Rightarrow\quad y(t)=\sum_{k=1}^{m}a_k f_k(t),\qquad f_k(t)\ \text{modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\exp(\lambda t)$, $t\exp(\lambda t)$, $\ldots$, $t^{r-1}\exp(\lambda t)$ são modos próprios.

$$D(p)y(t)=N(p)x(t)\quad ,\ \text{ se }\ \bar{D}(p)x(t)=0\ \text{então}\ \ \bar{D}(p)D(p)y(t)=0$$

$$\text{Solução forçada:}\quad y(t)=y_h(t)+y_f(t)\quad\Rightarrow\quad D(p)y_f(t)=N(p)x(t)\ ,\ D(p)y_h(t)=0$$

$$y_f(t)=\sum_{k=1}^{m}b_k g_k(t),\qquad g_k(t)\ \text{modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)}$$

Resposta em Freqüência: $H(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(-st)dt \quad , \quad H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$

Diagramas assintóticos de Bode: gráficos do módulo (em dB) e da fase (em graus) versus a freqüência em escala logarítmica.

$$M_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log M(\omega) \quad \text{(sendo log o logaritmo na base 10)}$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad \Rightarrow \quad M_{\mathrm{dB}}(\omega) = M_{1\mathrm{dB}}(\omega) + M_{2\mathrm{dB}}(\omega) \quad ; \quad \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

ω_c (freqüência de corte): encontro das assíntotas de baixa e alta freqüência

Pólos complexos: $0 < \xi < 1$, $\omega_n > 0$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^* = \lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\text{pico } (0 < \xi < 1/\sqrt{2}): \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad ; \quad M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Transformada Z: $\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} \ , \quad \mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1, \quad \mathcal{Z}\{\delta[n+m]\} = z^m \ , m \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{Z}\{x[n+1]u[n]\} = z\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - zx[0], \quad \mathcal{Z}\{x[n+2]u[n]\} = z^2\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - z^2x[0] - zx[1],$$

$$\mathcal{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{m-k} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a}, \quad \mathcal{Z}\{na^n u[n]\} = \frac{az}{(z-a)^2}, \quad \mathcal{Z}\{n^2a^n u[n]\} = \frac{az^2 + a^2z}{(z-a)^3}, \quad |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} a^{n-m}u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}}, \ \mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix} a^{n}u[n]\right\} = \frac{z^{(m+1)}}{(z-a)^{(m+1)}}, \ m \in \mathbb{N}, |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}\{nx[n]\} = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{x[n]\}$$

Coeficientes a determinar (equações a diferenças)

$$D(p)y[n] = 0 \quad \Rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k[n] \quad f_k[n] \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então λ^n, $n\lambda^n$, $\ldots$, $n^{r-1}\lambda^n$ são modos próprios.

$$D(p)y[n] = N(p)x[n] \quad , \quad \text{se } \ \bar{D}(p)x[n] = 0 \text{ então } \ \bar{D}(p)D(p)y[n] = 0$$

$$\text{Solução forçada:} \quad y[n] = y_h[n] + y_f[n] \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f[n] = N(p)x[n] \ , \ D(p)y_h[n] = 0$$

$y_f[n]$: combinação linear dos modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)