1ª Questão: Para $x = 1$, determine: a) Os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico não linear descrito por

$$\dot{v}_1 = v_1 v_2 - 2v_2 + 2(x-1)$$
$$\dot{v}_2 = -3v_1 + v_2 v_1 - 4(x-1)$$

b) O sistema linearizado $\dot{v} = Av + bx$ em cada um dos pontos de equilíbrio

Pontos de equilíbrio: $(0,0), (2,3)$, Aproximação linear: $\dot{v} = \begin{bmatrix} v_2 & v_1 - 2 \\ -3 + v_2 & v_1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} x$

$$(0,0): \ A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2,3): \ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

2ª Questão: Usando a aproximação linear, conclua sobre o comportamento do sistema da **Questão 1** em cada um dos pontos de equilíbrio (assintoticamente estável, instável ou nada se pode afirmar). Justifique.

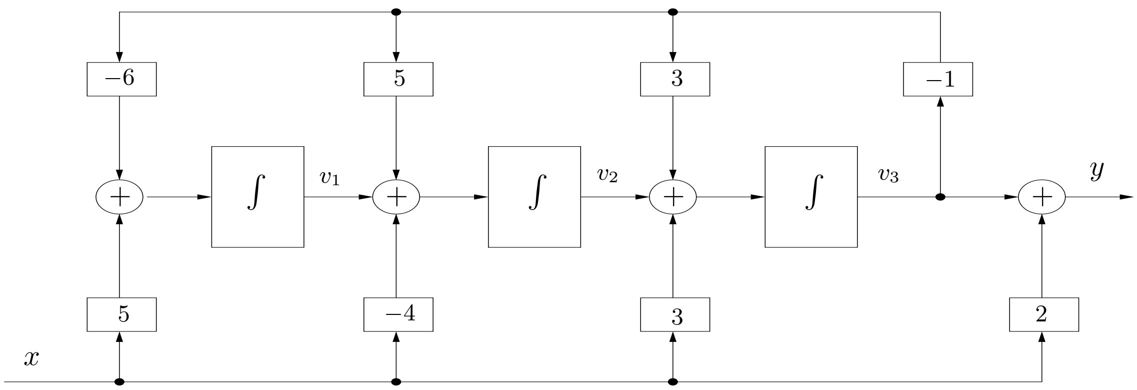
$$(0,0): \ A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \Delta(\lambda) = \lambda^2 - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = +\sqrt{6}, \ \lambda_2 = -\sqrt{6}, \ \text{instável (autovalor positivo)}$$

$$(2,3): \ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \Delta(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 2, \ \text{instável (autovalores positivos)}$$

3ª Questão: Complete o desenho para que a realização represente o sistema descrito por

$$(p^3 + 3p^2 + 5p - 6)y(t) = (2p^3 + 9p^2 + 6p - 7)x(t), \quad p = \frac{d}{dt}$$

$$\beta_3 = 2 \ , \ \bar{N}(p) = 3p^2 - 4p + 5 \ , \ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \ , \ b = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \ , \ c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ d = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$



4ª Questão: Considere o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} v$$

a) Determine $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, isto é, a transformada de Laplace de $y(t)$
b) Usando a transformada inversa de Laplace, determine $y(t)$

$$Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}v(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-2 & 3 \\ -3 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3s-3}{(s-2)^2+9} = \frac{3(s-2)}{(s-2)^2+9} + \frac{3}{(s-2)^2+9}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \big(3\exp(2t)\cos(3t) + \exp(2t)\mathrm{sen}(3t)\big)u(t)$$

5ª Questão: Usando o Teorema de Cayley-Hamilton, determine $A^3 - 6A^2 + 11A$ para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6, \quad A^3 - 6A^2 + 11A = 6\mathbf{I}$$

6ª Questão: Determine a forma de Jordan da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - A) = \lambda^3, \qquad \hat{A} = \mathrm{diag}(J_2(0), J_1(0)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7ª Questão: Determine a solução $v(t)$ para o sistema

$$\dot{v} = Av = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dado que

$$\bar{v} = Pv, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\bar{v}} = \left(PAP^{-1}\right)\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{v}$$

$$v(t) = P^{-1}\bar{v}(t), \ \bar{v}(0) = Pv(0),$$

$$\bar{v}(t) = \exp\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t\right) \bar{v}(0) = \begin{bmatrix} \exp(t) & 0 \\ 0 & \exp(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\exp(t) \\ \exp(2t) \end{bmatrix}, \ v(t) = \begin{bmatrix} -4\exp(t) + 5\exp(2t) \\ \exp(2t) \end{bmatrix}$$

8ª Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Determine uma matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad Q_{geral} = \begin{bmatrix} a & c \\ -2a & -3c \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \ , \ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função $y(t) = 10t\exp(t)\mathrm{sen}(2t)$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

10ª Questão: Determine a resposta ao degrau $y_u(t)$, $t \geq 0$, do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} -64 & -22 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 18 \end{bmatrix} x, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(t) = u(t) \ \ \text{(função degrau)}$$

$$H(s) = \frac{18s^2 + 86s + 80}{s^2 + 6s + 8} = \frac{18s^2 + 86s + 80}{(s+2)(s+4)}, \quad y_u(t) = \big(10 + 3\exp(-4t) + 5\exp(-2t)\big)u(t)$$