Resolução PR1 - 2016 Daniel Andrade

EA616

Deslocamento no domínio da Transf.

$\uparrow$

(5) 1 a) Tabela: $\mathcal{L}\{\exp(-at)\cos(b t)\cdot u(t)\} = \dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$

Logo: $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{8\cdot\exp(-2t)\cdot\cos(4t)\,u(t)\}$

$$H(s) = 8\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+4^2}$$

b) P/ entradas exponenciais:

$$x(t) = \exp(a\cdot t) \Rightarrow y_f(t) = H(s)\Big|_{s=a}\cdot x(t)$$

Ps: Vem da convolução

$$y_f(t) = h(t) * x(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau)\, e^{a(t-\tau)}\,d\tau$$

$$y_f = e^{at}\cdot\int_0^{\infty} h(\tau)\,e^{-a\tau}\,d\tau = x(t)\cdot H(s)\Big|_{s=a}$$

Assim, $y_f(t) = 8\cdot\left(\dfrac{2+2}{32}\right)\exp(2t) \Rightarrow y_f(t) = \exp(2t)$

Q2. Aplicando a Transformada em ambos os lados (cond. iniciais nulos):

$$(p^2+6p+13)y = (5p+21)x \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} (s^2+6s+13)Y = (5s+21)X$$

$$H(s) = \frac{Y}{X} = \frac{5s+21}{\underbrace{(s^2+6s+13)}_{\text{Separar em quadrado } (\Delta<0)}} = \frac{5s+21}{(s+3)^2+2^2}$$

Tem a "forma" da transformada do sen/cos c/ deslocamento exp(-3t)

Manipulando:

$$H(s) = 5\underbrace{\frac{(s+3)}{(s+3)^2+2^2}}_{\text{forma cosseno}} + 3 \cdot \underbrace{\frac{2}{(s+3)^2+2^2}}_{\text{forma seno}}$$

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$:

$$h(t) = [5\exp(-3t)\cos(2t) + 3\exp(-3t)\cdot \mathrm{sen}(2t)]\,u(t)$$

Q3 $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = 1 + \frac{6}{s+2} = \frac{s+2+6}{s+2} = \frac{s+8}{s+2}$

$$x(t) = 0 \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s+2}\cdot y(0) = \frac{5}{s+2}$$

Considera-se apenas os polos (Exemplo 1.15)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 5\cdot\exp(-2t)\cdot u(t)$$

Q4. • Em $w = 10^0$: Inclinação +20 dB/dec ⇒ Zero

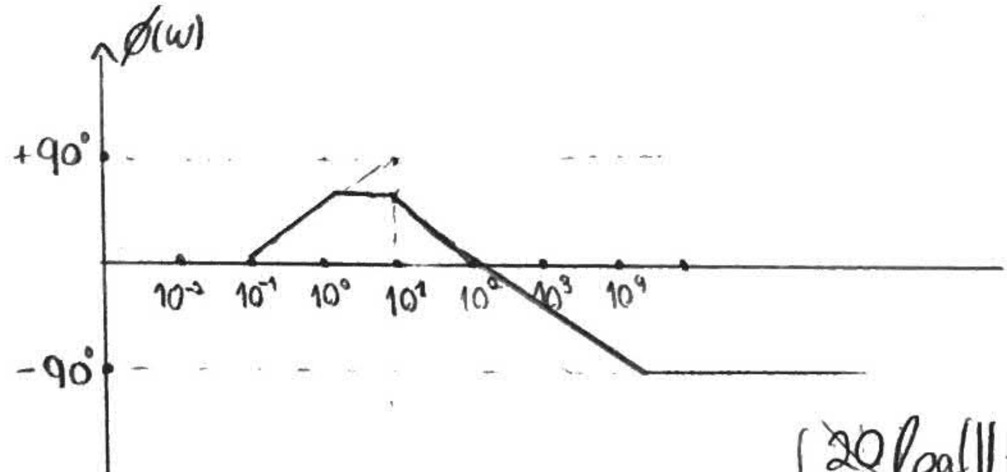
a) • Em $w = 10$: Inclinação −20dB/dec ⇒ Pólo

• Em $w = 10^3$: Inclinação −20dB/dec ⇒ Pólo

Assim, $H(s) = \dfrac{(s+1)}{(s+10)(s+10^3)}$ ⇒ Zero: Reta de +45°/dec saindo uma década antes até uma década depois

Pólo: Mesmo com −45°/dec

Traçando a fase:



b) $y_f = \|H(s)\|\Big|_{s=j10} \cdot x(t + \phi(10))$

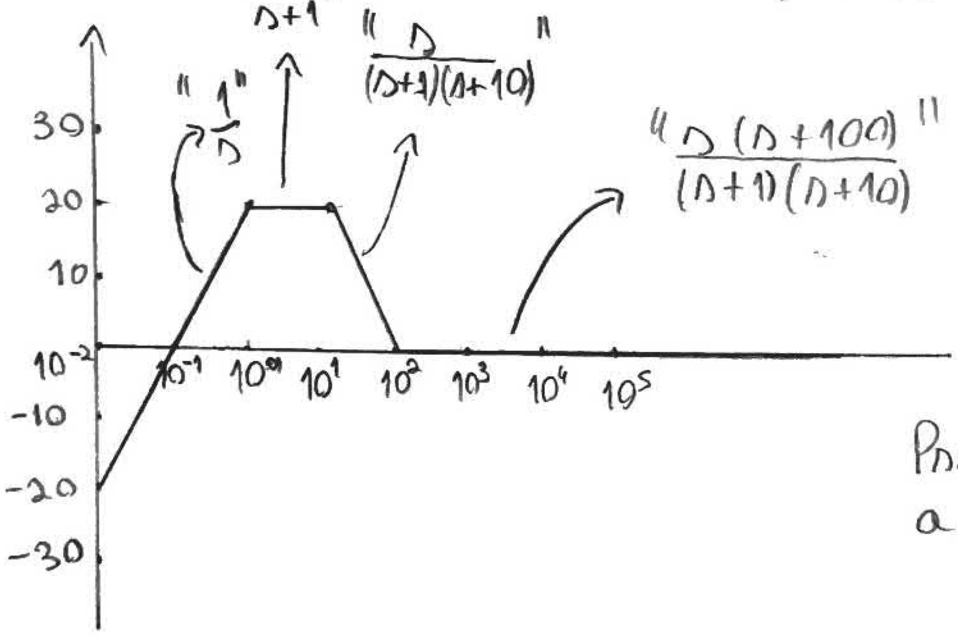
$$\begin{cases} 20\log(\|H(s)\|) = \overset{2}{\cancel{4}}0\,dB \\ \|H(s)\| = 10^2 = 100 \\ \phi(10) = 45^\circ \end{cases}$$

Utilizando os pontos dos gráficos: $y_f(t) = 100 \cdot \cos(10t + 45^\circ)$

Q5. · Seguindo a mesma técnica da questão anterior:

a)

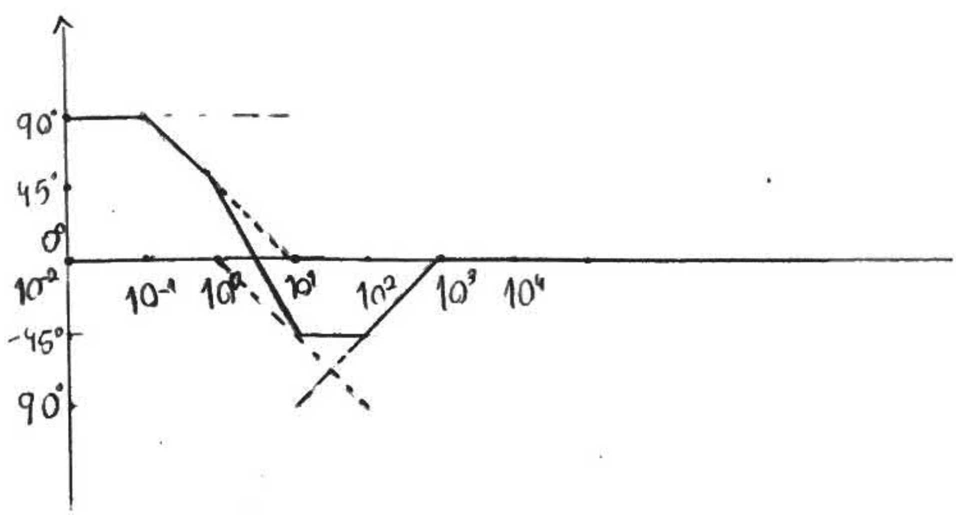
$$H(s) = \frac{s\cdot(s+100)}{(s+1)(s+10)}$$



Ps: O fator "s" contribui desde o "infinito".

Ps2: Da mesma forma, a fase inicia em +90°.

b) · Agora para a fase:



Linha pontilhada: Contribuição individual de cada polo/zero.

Q6. Neste caso não podemos resolver pelo modo $y_f(t) = H(s)\Big|_{s=s_0} \cdot x(t)$ pois teríamos uma singularidade.

• Resolvendo por Eq. diferencial:

$$(s^2+6s+5)Y(s) = X(s) \Rightarrow (p^2+6p+5)y(t) = x(t)$$

$$(p+1)(p+5)y(t) = e^{-t}$$ ⇝ Assim, podemos ver que existe um modo e^{-t} duplo.

• Dessa forma a entrada vai gerar uma resposta forçada $y_f(t) = At \cdot e^{-t}$

• Substituindo na equação:

$$\ddot{y}_f(t) = A \cdot t \cdot e^{-t} - 2Ae^{-t} \qquad \dot{y}_f(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t}$$

$$(p^2+6p+5)Ate^{-t} = e^{-t}$$

$$\Rightarrow \cancel{Ate^{-t}} - 2Ae^{-t} + 6Ae^{-t} - \cancel{6Ate^{-t}} + \cancel{5Ate^{-t}} = e^{-t}$$

$$4A\cancel{e^{-t}} = \cancel{e^{-t}} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \Rightarrow y_f(t) = \frac{t \cdot e^{-t}}{4}$$

Q7 $y(t) = te^{-t} + e^{-t} + 5$

Modo e^{-t} duplo: $\frac{1}{(s+1)^2}$ Modo constante: $\frac{1}{s}$

Eq. dif.: $p(p+1)^2 y(t) = 0$

Cond. Iniciais: $*\dot{y}(t) = e^{-t} + (1+t)(-e^{-t}) = -te^{-t}$

$\dot{y}(0) = 0$

$*\ddot{y}(t) = -e^{-t} + te^{-t} \Rightarrow \ddot{y}(0) = -1$

$* y(0) = 5 + 1 = 6$

Q8 * Resolvendo p/ Coeficientes a determinar:

→ Forçada: $y_f(t) = \alpha \cdot \cos(2t) + \beta \,\mathrm{sen}(2t)$

• Substituindo na Eq.:

$\dot{y}_f(t) = -2\alpha \cdot \mathrm{sen}(2t) + 2\beta \cos(2t)$ $\ddot{y}_f(t) = -4\alpha \cos(2t) - 4\beta \,\mathrm{sen}(2t)$

$\ddot{y}_f(t) + 4\dot{y}_f(t) + 4 = 16\cos(2t)$

$-4\alpha \cancel{\cos(2t)} - 4\beta \cancel{\mathrm{sen}}(2t) - 8\alpha \,\mathrm{sen}(2t) + 8\beta \cos(2t) + 4\cancel{\alpha} \cos(2t) + 4\cancel{\beta \,\mathrm{sen}(2t)} = 16\cos(2t)$

$\Rightarrow 8\beta \cos(2t) = 16\cos(2t) \Rightarrow \beta = 2$

$\Rightarrow -8\alpha \,\mathrm{sen}(2t) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$\Bigg\} \; y_f(t) = 2\,\mathrm{sen}(2t)$

Cont. Q8

- Homogenea: Modo "e^{-2t}" duplo

$$y_h(t) = Ate^{-2t} + Be^{-2t}$$

- Condições iniciais:

$$\begin{cases} y(t) = Ate^{-2t} + Be^{-2t} + 2\,\text{sen}(2t) \\ \dot{y}(t) = Ae^{-2t} - 2Ate^{-2t} - 2Be^{-2t} + 2\cdot 2\cos(2t) \end{cases}$$

$$\dot{y}(0) = A - 2B + 4 = 0 \Rightarrow A = -2$$

$$y(0) = B = 1$$

Assim, $y(t) = -2te^{-2t} + e^{-2t} + 2\,\text{sen}(2t)$

Q9 • Aplicando a transformada Z:

$$Z^2(Y(Z) - y[0] - Z^{-1}y[1]) - 4z(Y(Z) - y[0]) + 4Y(Z) = 0$$

$$Z^2(Y(Z) - 1 - 4Z^{-1}) - 4Z(Y(Z) - 1) + 4Y(Z) = 0$$

$$Z^2Y(Z) - Z^2 - \cancel{4Z} - 4ZY(Z) + \cancel{4Z} + 4Y(Z) = 0$$

$$Y(Z)[Z^2 - 4Z + 4] = Z^2 \rightsquigarrow Y(Z) = \frac{Z^2}{(Z-2)^2}$$

* Tabela: $\mathcal{Z}\{(n+1)\,a^n u[n]\} = \dfrac{Z^2}{(Z-a)^2}$

$a = 2$

Logo: $y[n] = (n+1)\,2^n u[n]$ //

Q10 Equação: $y[n+1] - y[n] = n+1$, $y[0] = 1$

• Por Coeficientes a determinar:

$(p-1)\,y[n] = n+1$

↳ Modo "1^n" ↳ Modo "1^n" duplo

$y_f[n] = \alpha n^2 + \beta n$ (Devido à entrada)

Substituindo: $\alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) - \alpha n^2 - \beta n = n+1$

$$\alpha(\cancel{n^2}) + 2\alpha n + \alpha + \cancel{\beta n} + \beta - \cancel{\alpha n^2} - \cancel{\beta n} = n+1$$

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\ 2\alpha n = n \\ &\cdot\ \alpha + \beta = 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \alpha &= 1/2 \\ \beta &= \tfrac{1}{2} \end{aligned} \qquad y_f[n] = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$y_h[n] = \gamma \Rightarrow y[n] = \frac{n(n+1)}{2} + \gamma \Rightarrow y[0] = \gamma = 1$$

$y[n] = \frac{n(n+1)}{2} + 1$