1ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico não linear descrito por

$$\dot{v} = -v(v-1)(v+1) = -v^3 + v$$

b) Usando uma aproximação linear, determine o comportamento (local) em cada um dos pontos de equilíbrio

Pontos de equilíbrio (0), (-1), (1)
Aproximação linear: $\dot{v} = [-3v^2+1]v$

$$(0) : \dot{v} = [1]v \text{ instável}, \quad (-1) : \dot{v} = [-2]v \text{ assint. estável}, \quad (1) : \dot{v} = [-2]v \text{ assint. estável}$$

2ª Questão: a) Determine os cinco pontos de equilíbrio do sistema abaixo para $x = 0$

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= v_2(v_2-1)(v_1-1) + x = v_1v_2^2 - v_1v_2 - v_2^2 + v_2 + x \\ \dot{v}_2 &= v_1(v_1+1)(v_2+1) - 2x = v_1^2v_2 + v_1^2 + v_1v_2 + v_1 - 2x\end{aligned}$$

b) Determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx$$

$$(0,0), \ (-1,0), \ (0,1), \ (-1,1), \ (1,-1)$$

$$A = \begin{bmatrix} v_2^2 - v_2 & 2v_1v_2 - 2v_2 - v_1 + 1 \\ 2v_1v_2 + 2v_1 + v_2 + 1 & v_1^2 + 2v_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$(p^3 - 4p^2 + 5p - 9)y(t) = (5p^3 - 14p^2 + 27p - 49)x(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & -5 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad d = 5$$

4ª Questão: Considere o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} v$$

a) Determine $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, isto é, a transformada de Laplace de $y(t)$

b) Usando a transformada inversa de Laplace, determine $y(t)$

$$Y(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}v(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & s+12 \\ -1 & s+7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2s-4}{s^2+7s+12} = \frac{-10}{s+3} + \frac{12}{s+4}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \big(-10\exp(-3t) + 12\exp(-4t)\big)u(t)$$

5ª Questão: Determine uma matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ que satisfaça $A + \mathrm{I} + A^2 = A^{-1} - \mathrm{I} + A^{-2}$

$$A^4 + A^3 + 2A^2 - A - \mathrm{I} = 0, \quad \Delta(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

6ª Questão: Determine a forma de Jordan da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - A) = (\lambda - 1)^3$$

$$J_3(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7ª Questão: Determine a solução $v(t)$ para o sistema

$$\dot{v} = Av = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} 28\exp(-3t) - 27\exp(-4t) \\ 7\exp(-3t) - 9\exp(-4t) \end{bmatrix}$$

8ª Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ -25 & 13 \end{bmatrix}$$

b) Determine uma matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad Q_{geral} = \begin{bmatrix} a & c \\ (5/3)a & (5/2)c \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \ , \ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função $y(t) = (5 - 10t)\mathrm{sen}(3t)$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

10ª Questão: Determine a resposta ao impulso $h(t)$, $t \geq 0$ (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} v$$

$$H(s) = \frac{8s - 8}{s^2 + 2s + 5} = \frac{8(s+1)}{(s+1)^2 + 4} - \frac{8(2)}{(s+1)^2 + 4}, \quad h(t) = 8\exp(-t)\big(\cos(2t) - \mathrm{sen}(2t)\big)u(t)$$