Resolução Comentada PR3 2S-2017:

Questão 1:

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & \overbrace{-25}^{-\alpha_0} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \overbrace{-21}^{\beta_0} \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \underbrace{[0 \quad 1]}_{c} v + \underbrace{[1]}_{d} x$$

$$H(s) = \frac{-21}{s^2+25} + 1 = \frac{s^2+4}{s^2+25}$$

$y_f(t) = ?$ para $x(t) = \cos(10t) + \underbrace{10}_{10e^{0t}}$

$$y_f(t) = |H(j10)| \cos(10t) + 10 \cdot H(0)$$

$$\overset{!}{=} \frac{32}{25} \cos(10t) + \frac{4}{25} \cdot 10$$

$$\boxed{y_f(t) = \frac{32}{25} \cos(10t) + \frac{8}{5}}$$

Questão 2 :

$$\dot{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}}_{A} v \qquad y = \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}}^{C} v$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 6)(\lambda - 12)$$

$$\downarrow$$

raizes $\lambda = 6$

$\lambda = 12$

Para testar os modos observáveis verificamos o rank da matriz

$$\text{rank}\left(\begin{vmatrix} A - \lambda I \\ C \end{vmatrix} \right) = n = 2 \text{ neste caso}$$

Para $\lambda = 6$:

$$\text{rank}\left(\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = 1 \text{ (modo não observável)}$$

Para $\lambda = 12$

$$\text{rank}\left(\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = 2 \text{ (modo observável)}$$

Questão 3 :

α, β ? p/ sistema controlável

$$\dot{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_{A} v + \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{b} x$$

→ Para um sistema ser controlável a matriz de controlabilidade $Cntr(A,b)$ deve ter $det(A,b) \neq 0$.

$$|Cntr(A,b)| = |[\, b \quad Ab \,]| \neq 0$$

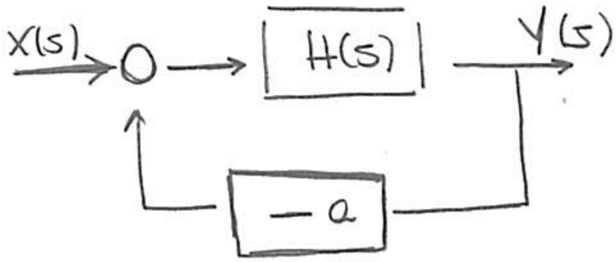
$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & 3\alpha + 2\beta \end{vmatrix} \neq 0$$

$$3\alpha^2 + 2\alpha\beta - \alpha\beta \neq 0$$

$$3\alpha^2 + \alpha\beta \neq 0$$

$$\alpha(3\alpha + \beta) \neq 0 \nearrow \boxed{\alpha \neq 0} \searrow \boxed{3\alpha \neq -\beta}$$

Questão 4:



$$H(s) = \frac{s + 2a}{s^2 - as + 3a}$$

sistema em malha fechada

$$G(s) = \frac{H(s)}{1 + aH(s)} = \frac{\dfrac{s+2a}{s^2 - as + 3a}}{1 + a\dfrac{s+2a}{s^2-as+3a}} = \frac{s+2a}{s^2 + 3a + 2a^2}$$

Definição de sensibilidade em relação à variável "a"

$$\frac{\partial G}{\partial a}\frac{a}{G} = \frac{2(s^2+3a+2a^2) - (s+2a)(3+4a)}{(s^2+3a+2a^2)^2}$$

Sensibilidade ao ganho DC ($s = 0$) $\rightarrow$ $\left.\dfrac{\partial G}{\partial a}\dfrac{a}{G}\right|_{s=0} = -\dfrac{2a}{3+2a}$

para $a = 1/6$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{sens.} = -0{,}1}$

Questão 5

$$D(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s + 10$$

p^5	1	4	2
p^4	1	5	10
p^3	$\underbrace{\dfrac{1.4-5.1}{1}}_{\alpha}$	$\underbrace{\dfrac{1.2-10.1}{1}}_{\beta}$	
p^2	$\underbrace{\dfrac{\alpha.5-\beta.1}{\alpha}}_{\gamma}$	$\underbrace{\dfrac{\alpha.10-0.1}{\beta}}_{\xi}$	
p^1	$\underbrace{\dfrac{\gamma.\beta-\xi.\alpha}{\gamma}}_{\theta}$	0	
p^0	$\dfrac{\theta.\xi}{\theta}$		

$\Rightarrow$

p^5	1	4	2
p^4	1	5	10
p^3	-1	-8	
p^2	-3	10	
p^1	$-34/3$		
p^0	10		

Sinais da 1º coluna

p^5	p^4	p^3	p^2	p^1	p^0
+	+	−	−	−	+

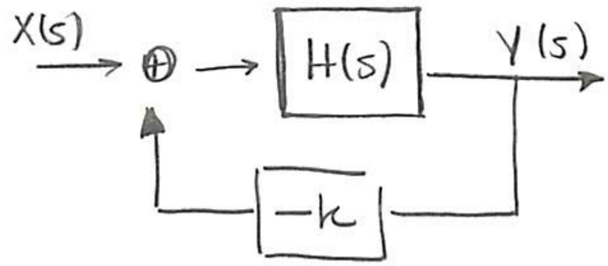
1º troca   2º troca

$\therefore$ $\boxed{\text{2 raízes } Re(s)>0}$

Nº de trocas de sinal = nº de raízes c/ parte real positiva.

Questão 6:

$$H(s) = \frac{s^2 + s}{s^3 + s + 6}$$



Malha fechada

$$G(s) = \frac{H(s)}{1 + kH(s)} = \frac{\dfrac{s^2+s}{s^3+s+6}}{1 + \dfrac{k(s^2+s)}{s^3+s+6}}$$

$$= \frac{s^2+s}{s^3 + s(1+k) + ks^2 + 6} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Pela definição um sistema SLIT causal é BIBO estável se e somente se todos os pólos tiverem parte real negativa

Assim $D(s)$ precisa ser um polinômio Hurwitz.

$$D(s) = s^3 + s(1+k) + ks^2 + 6$$

Montando a tabela de Routh

p^3	1	$1+k$
p^2	k	6
p^1	$\frac{k+k^2-6}{k}$	0
p^0	6	

$$k>0 \quad e \quad \frac{k+k^2-6}{k}>0$$

$$k>0 \quad e \quad k+k^2>6$$

$$k > \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$k \to > -3$$
$$\to > 2$$

$\therefore$ fazendo a intersecção

$$\boxed{k>2}$$

Questão 7 :

A matriz A possui os seguintes blocos

- 2 blocos de jordan $\pm j$ de ordem 1
- 1 blocos de ordem 2 $\pm 2j$

Pela teoria sabe-se que: se houver algum autovalor com parte real positivo ou blocos de Jordan de ordem maior que 1 associados aos autovalores de parte real NULA $\rightarrow$ INSTÁVEL

$\therefore$ $\boxed{\text{sistema INSTÁVEL}}$

Questão 8

Para que o sistema seja AS. ESTÁVEL:

- P deve ser única, simétrica e definida positiva
- $A'P + PA = -Q \rightarrow$ Q definida positiva

$$P = \begin{vmatrix} 5 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{vmatrix}$$ ↗ Já é simétrica ✓

definida positiva

$5 > 0$ ✓

$5 \cdot 2 - \alpha^2 > 0 \rightarrow \boxed{-\sqrt{10} < \alpha < \sqrt{10}}$

$$A'P + PA = \begin{bmatrix} -2 & \beta \\ \beta & -4 \end{bmatrix} = -Q$$

$$Q = \begin{vmatrix} 2 & -\beta \\ -\beta & 4 \end{vmatrix}$$ ↗ $2 > 0$ ✓

→ $8 - \beta^2 > 0$

$$\boxed{-\sqrt{8} < \beta < \sqrt{8}}$$

Questão 9:

pólos: $\begin{cases} s = 0 \\ s = -2 \\ s = -5 \\ s = -10 \\ s = 2 \\ s = 5 \end{cases}$

zeros: $\{ -5 \pm j$

Assíntotas $\eta = 6 - 2$

$= 4$

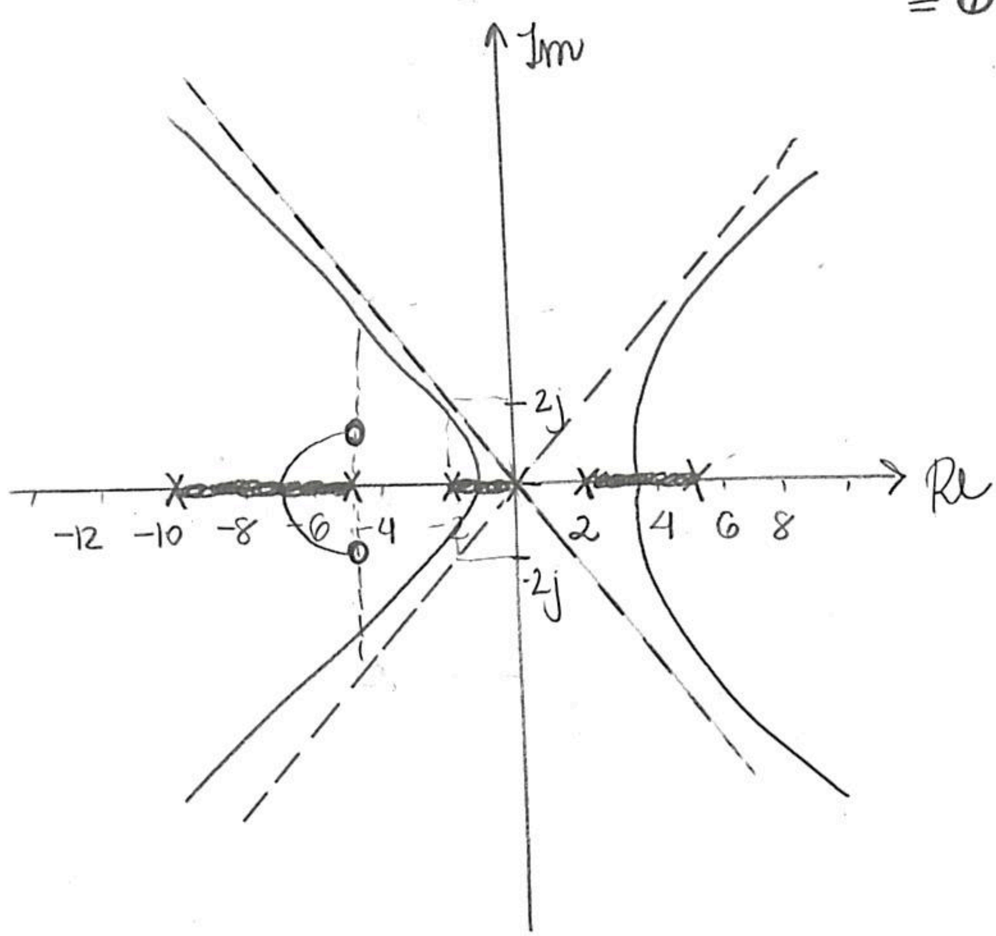
$\pm \pi/4 \quad \pm \dfrac{3\pi}{4}$

Encontro das assíntotas

$\dfrac{1}{\eta} \left(\sum Re(\lambda_r) - \sum Re(\gamma_i) \right)$

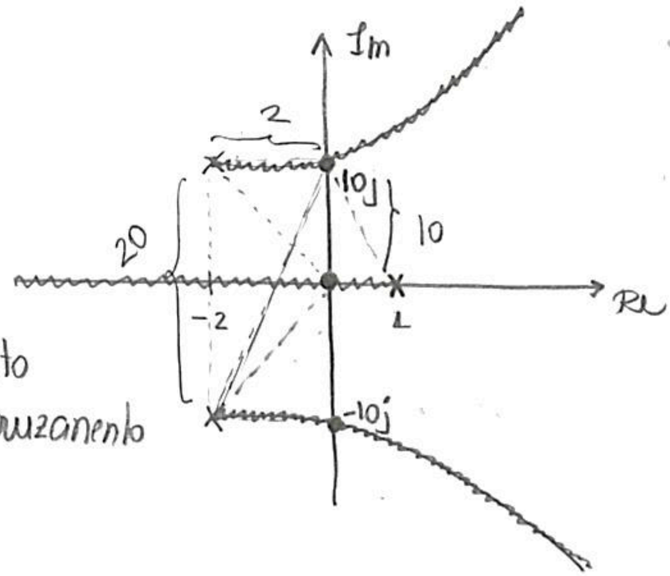
$\dfrac{1}{4} \left(-10 - (-10) \right)$

$= 0$



Questão 10:

$$k = \left. \frac{\prod (s-\lambda_j)}{\prod (s-\gamma_j)} \right|_{s = \text{ponto de cruzamento}}$$



<u>para $s = 0$</u>

$$k = 1 \cdot \sqrt{10^2+2^2} \cdot \sqrt{10^2+2^2}$$

$$= 104$$

<u>Para $s = \pm j10$</u>

$$k = \sqrt{2^2}\,\sqrt{10^2+1}\,\sqrt{20^2+2^2}$$

$$= 2\sqrt{101}\,\sqrt{404}$$