Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

1ª Questão: Determine a solução forçada $y_f(t)$ para a entrada $x(t) = 5\exp(j) + \text{sen}(t)$ do sistema linear invariante no tempo descrito por

$$\ddot{y} + 5y = x$$

2ª Questão: Determine a transformada de Laplace (bilateral) e o domínio de existência Ω_x para o sinal

$$x(t) = t^4 \exp(2t)u(-t) - t^3 \exp(-5t)u(t)$$

3ª Questão: Determine $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ (transformada de Laplace bilateral inversa) para

$$X(s) = \frac{6s^2 + 3s + 6}{(s+1)^2(s-2)}, \quad -1 < \text{Re}(s) < 2$$

4ª Questão: a) Determine a transformada unilateral de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, sendo $y(t)$ a solução da equação diferencial abaixo

$$\dot{y} + 3y = 4\exp(-3t)\cos(2t)u(t), \quad y(0) \text{ dado}$$

b) Determine a solução $y(t)$ para $y(1) = 10$

5ª Questão: Determine a resposta ao degrau $y_u(t)$ (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 13y = \ddot{x} - 11\dot{x} - 26x$$

6ª Questão: Determine, para a transformada (unilateral) de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ de um sinal causal dada por

$$Y(s) = \frac{(s-2)(s-3)}{3s(s^2+1)}, \quad \text{Re}(s) > 0$$

a) O valor final $y(+\infty)$ b) O valor inicial $y(0^+)$

7ª Questão: a) Determine a solução forçada $y_f(t)$ da equação diferencial

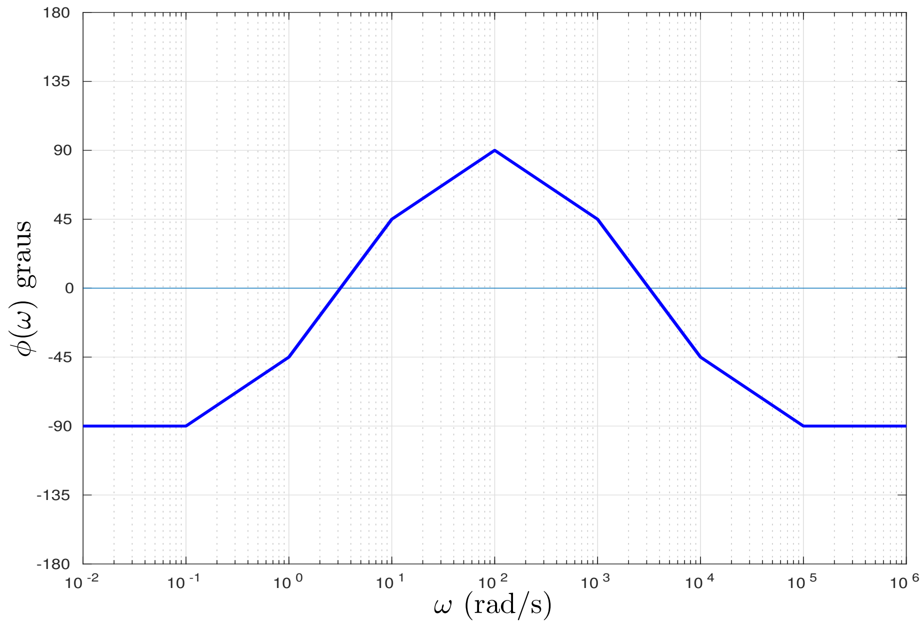
$$\ddot{y} + \dot{y} = 5t - 2\exp(-t)$$

b) Determine a solução para $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$

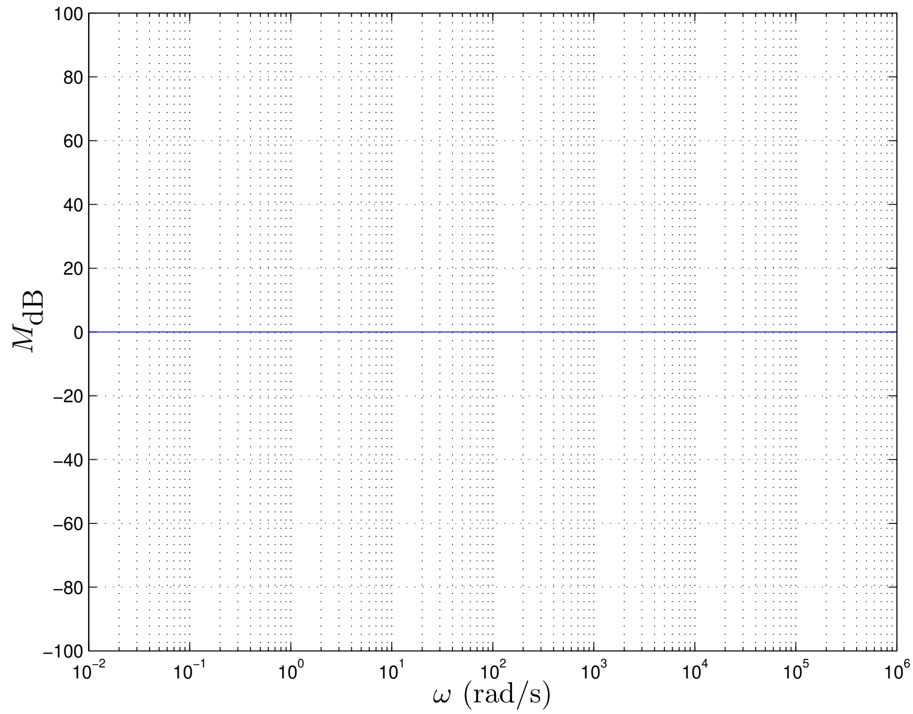
8ª Questão: Determine uma equação diferencial homogênea e as condições iniciais que produzem a mesma solução da equação

$$(p^2 - 6p + 13)y = \exp(3t)\text{sen}(2t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 10$$

9ª Questão: Considere as assíntotas de fase (em graus) do diagrama de Bode em escala logarítmica da função de transferência de um sistema linear invariante no tempo de fase mínima da figura abaixo.



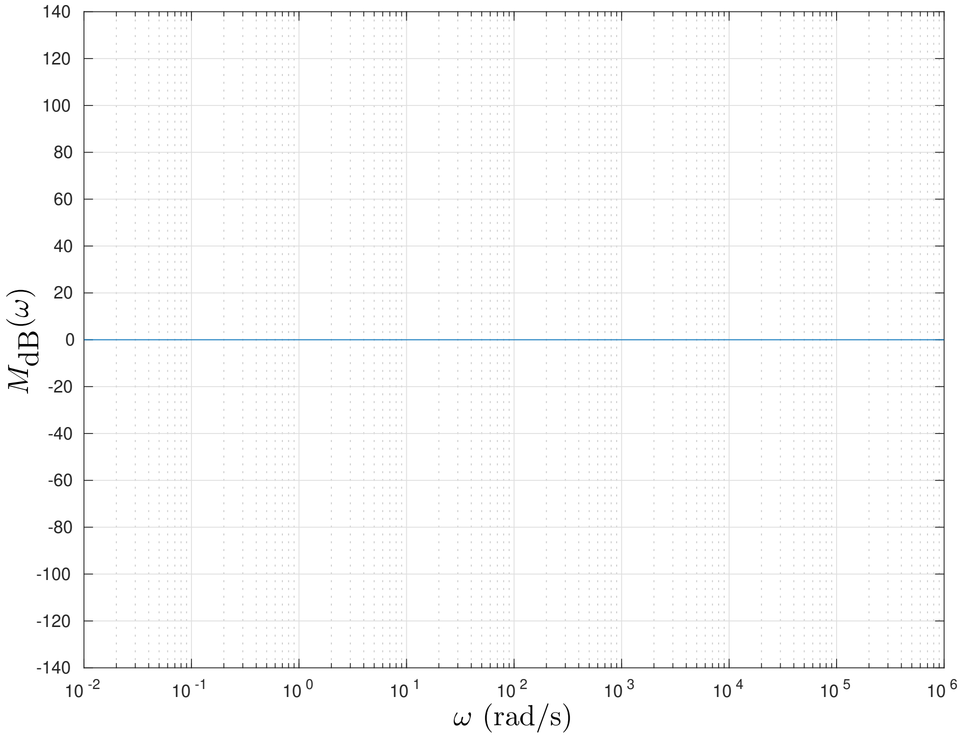
a) Sabendo que o gráfico começa no ponto (0.01 rad/s, 20dB), esboce as assíntotas de módulo



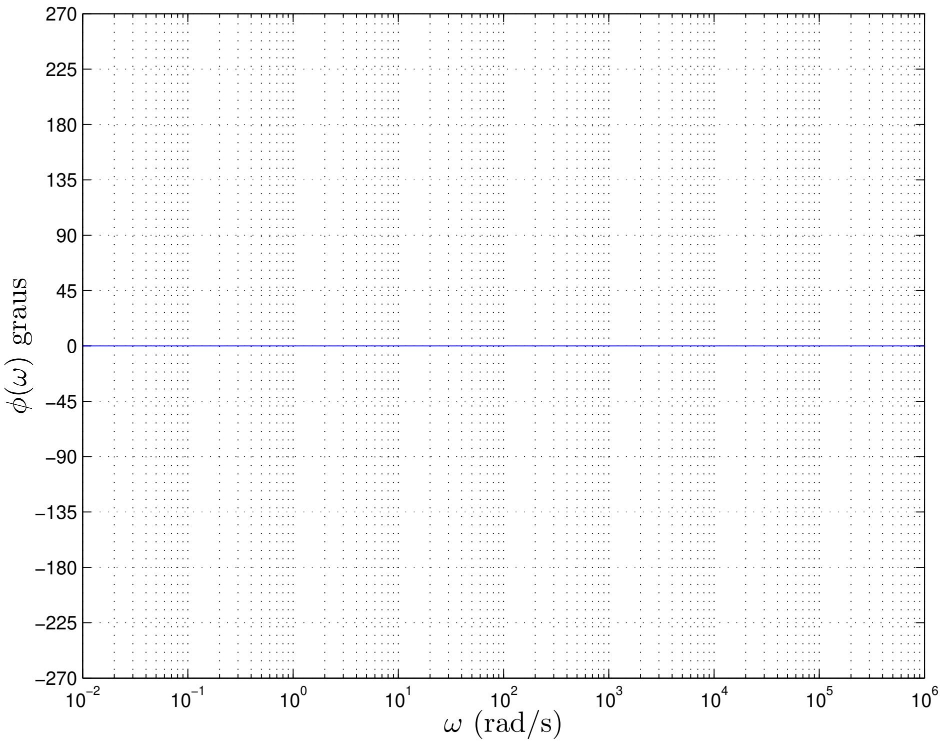
b) Baseando-se nos diagramas assintóticos de módulo e fase, determine a solução forçada do sistema para a entrada $x(t) = \cos(t) + \text{sen}(10000t)$

10ª Questão: a) Esboce as assíntotas do módulo (diagrama de Bode em escala logarítmica) do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência

$$H(s) = 10^8 \times \left(\frac{(s+1)(s+10)}{s(s+100)(s+1000)} \right)$$



b) Esboce as assíntotas da fase (diagrama de Bode em graus) do sistema.



Função degrau: $u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$, Função impulso: $\delta(t) = \dfrac{d}{dt}u(t), \quad u(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \delta(\beta)d\beta$

$G_T(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2)$ (*gate* de largura T centrado em $t = 0$)

$\text{Tri}_{2T}(t) = (t/T+1)G_T(t+T/2)+(-t/T+1)G_T(t-T/2)$ (triângulo de largura $2T$ centrado em $t = 0$)

Transformada de Laplace (bilateral):

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(-st)dt \quad , \quad s \in \Omega_h \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = X(s)\Big|_{s=0, \quad 0\in\Omega_x}$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \ s \in \mathbb{C} \quad , \quad \mathcal{L}\{x(t) = x_1(t) * x_2(t)\} = \mathcal{L}\{x_1(t)\}\mathcal{L}\{x_2(t)\} \quad , \quad \Omega_x = \Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$$

$$\mathcal{L}\{y(t) = x(t - \tau)\} = X(s)\exp(-s\tau) \quad , \quad \Omega_y = \Omega_x \quad , \quad \mathcal{L}\{\exp(-at)u(t)\} = \frac{1}{s+a} \quad , \quad \text{Re}(s + a) > 0$$

$$\mathcal{L}\{x(-t)\} = X(-s), \ -s \in \Omega_x \quad , \quad \mathcal{L}\{-\exp(-at)u(-t)\} = \frac{1}{s+a}, \ \text{Re}(s + a) < 0$$

$$\mathcal{L}\{\exp(-\alpha t)\cos(\beta t)u(t)\} = \frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \ , \mathcal{L}\{\exp(-\alpha t)\text{sen}(\beta t)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \ , \ \text{Re}(s + \alpha) > 0$$

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{t^m}{m!}\exp(-at)u(t)\Big\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}} \ , \ \text{Re}(s + a) > 0 \ , \ m \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\Big\{y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\beta)u(\beta)d\beta\Big\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{x(t)\} \quad , \quad \Omega_y \supset \Omega_x \cap \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 0\}$$

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{t^m}{m!}u(t)\Big\} = \frac{1}{s^{m+1}} \ , \ \text{Re}(s) > 0 \ , \ m \in \mathbb{N} \quad , \quad \mathcal{L}\{y(t) = \exp(-at)x(t)\} = X(s+a) \quad ; \quad \Omega_y = (s+a) \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\{y(t) = t^m x(t)\} = (-1)^m \frac{d^m X(s)}{ds^m} \quad , \quad \Omega_y = \Omega_x \ , \ m \in \mathbb{N} \quad , \quad \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) \quad , \quad \Omega_{\dot{x}} \supset \Omega_x$$

Transformada de Laplace (unilateral):

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0}^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt, \qquad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \ \text{Re}(s) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0), \quad \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - \dot{x}(0), \quad s \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\left\{x^{(m)}(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right\} = s^m\mathcal{L}\{x(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1}x^{(k)}(0)$$

$$x(0^+) = \lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to +\infty} sX(s) \ , \quad \lim_{t\to +\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

Coeficientes a determinar (equações diferenciais): $py(t) \triangleq \dfrac{d}{dt}y(t)$

$$D(p)y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(t), \qquad f_k(t) \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\exp(\lambda t)$, $t\exp(\lambda t)$, $\ldots$, $t^{r-1}\exp(\lambda t)$ são modos próprios.

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad , \quad \text{se} \quad \bar{D}(p)x(t) = 0 \text{ então } \quad \bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$$

$$\text{Solução forçada:} \quad y(t) = y_h(t) + y_f(t) \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f(t) = N(p)x(t) \ , \ D(p)y_h(t) = 0$$

$$y_f(t) = \sum_{k=1}^{m} b_k g_k(t), \qquad g_k(t) \text{ modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)}$$

Resposta em Frequência: $H(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(-st)dt \quad , \quad H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$

Diagramas assintóticos de Bode: gráficos do módulo (em dB) e da fase (em graus) versus a frequência em escala logarítmica.

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20\log M(\omega) \quad \text{(sendo log o logaritmo na base 10)}$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad \Rightarrow \quad M_{\text{dB}}(\omega) = M_{1\text{dB}}(\omega) + M_{2\text{dB}}(\omega) \quad ; \quad \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

ω_c (frequência de corte): encontro das assíntotas de baixa e alta frequência

Módulo: assíntotas constantes (valor DC) encontram com assíntotas (crescentes 20dB por década para zeros, ou decrescentes -20dB por década para polos) na frequência de corte ω_c. Pares de zeros e polos complexos são como zeros e polos duplos. Polo $(1/s)$ ou zero s na origem têm apenas a reta decrescente (polo) ou crescente (zero), cruzando 0dB na frequência $\omega_c = 1$.

Fase: polo (zero) com parte real negativa começa em 0^o e termina em -90^o $(+90^o)$, passando em -45^o $(+45^o)$ em ω_c. Zero com parte real positiva (zero de fase não mínima) começa com 180^o e termina em $+90^o$, passando em $+135^o$ em ω_c. Faz-se a ligação por uma reta (uma década para cima e uma década para baixo de ω_c). Pares de zeros e polos complexos são como zeros e polos duplos, porém para $\xi < 0.7$ a ligação é feita por uma reta vertical em ω_c. Polo ou zero na origem contribuem com um valor constante de -90^o (polo) ou $+90^o$ (zero).

Sistema de segunda ordem com polos complexos: $0 < \xi < 1$, $\omega_n > 0$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^* = \lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\text{pico } (0 < \xi < 1/\sqrt{2}): \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad ; \quad M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$