Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1ª Questão: Determine: a) A função de transferência do sistema

$$y[n+2] + 5y[n] = x[n]$$

b) A solução forçada para a entrada $x[n] = (2j)^n + 1$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{2z^2 + 16z}{(z-1)(z+2)}, \quad 1 < |z| < 2$$

3ª Questão: Para uma sequência causal cuja transformada Z é dada por

$$Y(z) = \frac{2z(112z^3 - 264z^2 + 239z - 69)}{(4z-1)^2(z-1)(2z-1)}, \quad |z| > 1$$

Determine: a) O valor final $y[+\infty]$ b) O valor inicial $y[0]$

$4^{\underline{a}}$ **Questão:** A transformada Z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \, \mathrm{Pr}\{\mathbb{X} = k\} = \frac{z}{(z-2)^2}, \ |z| < 2$$

Determine:

a) $\mathrm{Pr}\{\mathbb{X} = 1\}$

b) A média $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \, \mathrm{Pr}\{\mathbb{X} = k\}$

c) O momento de segunda ordem $\mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} = \sum_k k^2 \, \mathrm{Pr}\{\mathbb{X} = k\}$

$5^{\underline{a}}$ **Questão:** a) Determine $H(z)$, isto é, a transformada Z da resposta ao impulso (causal) $h[n]$ do sistema descrito pela equação a diferenças

$$y[n+2] - 2y[n+1] - 8y[n] = 2x[n+2] - 26x[n+1]$$

b) Determine $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ (condições iniciais nulas)

$6^{\underline{a}}$ **Questão:** a) Determine $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]u[n]\}$, isto é, a transformada Z da sequência $y[n]u[n]$ solução para $n \geq 0$ da equação a diferenças

$$y[n+2] + 2y[n+1] + y[n] = 0, \quad y[0], \ y[1] \text{ dados}$$

b) Determine $y[n]$ para $y[0] = 3$, $y[1] = -2$

$7^{\underline{a}}$ **Questão:** a) Determine a solução forçada para

$$y[n+1] - y[n] = 2n + 10$$

b) Determine a solução para $y[0] = 10$

8ª Questão: Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem como solução a sequência

$$y[n] = (3n)^2 + 5n - 2$$

9ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio $\bar{v} \in \mathbb{R}$ do sistema abaixo para $x = 0$

$$\dot{v} = (-2v^2 + v^3)(v + 2) - 3x = v^4 - 4v^2 - 3x$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx, \quad v \in \mathbb{R}$$

e avalie o comportamento (assintoticamente estável, instável ou indeterminado) a partir da aproximação linear

10ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\ddddot{y} + 4\dddot{y} + 3\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 3\ddddot{x} + 7\dddot{x} + 11\ddot{x} + \dot{x} + 14x$$

com a matrix de saída c dada por

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformada Z: $\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \dfrac{z}{z-a}\ ,\ |z|>|a| \quad , \quad \mathcal{Z}\{-a^n u[-n-1]\} = \dfrac{z}{z-a}\ ,\ |z|<|a|$

$\mathcal{Z}\{na^{n-1}u[n]\} = \dfrac{z}{(z-a)^2}\ ,\ |z|>|a| \quad , \quad \mathcal{Z}\{-na^{n-1}u[-n]\} = \dfrac{z}{(z-a)^2}\ ,\ |z|<|a|$

$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z), z\in\Omega_x \ \Leftrightarrow\ \mathcal{Z}\{x[-n]\} = X(z^{-1}), z^{-1}\in\Omega_x \quad , \quad \mathcal{Z}\{x_1[n]*x_2[n]\} = \mathcal{Z}\{x_1[n]\}\mathcal{Z}\{x_2[n]\}$

$m\in\mathbb{Z}_+ : \quad \mathcal{Z}\{n^m x[n]\} = \left(-z\dfrac{d}{dz}\right)^m X(z) \quad , \quad \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^m x[k] = \mathcal{Z}\{n^m x[n]\}\Big|_{z=1}\ ,\ 1\in\Omega_x$

$\mathcal{Z}\{y[n]=x[n-m]u[n-m]\} = z^{-m}\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\},\ \ \mathcal{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m\Big(\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\Big)$

$\mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} a^{n-m}u[n]\right\} = \dfrac{z}{(z-a)^{m+1}}\ ,\ |z|>|a|\ ,\ m\in\mathbb{N} \quad , \quad \mathcal{Z}\{n^2a^n u[n]\} = \dfrac{az^2+a^2z}{(z-a)^3}\ ,\ |z|>|a|$

$\mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix} a^{n}u[n]\right\} = (1-az^{-1})^{-(m+1)} = \dfrac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}\ ,\ m\in\mathbb{N}\ ,\ |z|>|a|$

$x[0] = \displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} X(z)$, Ω_x exterior de um círculo , $x[+\infty] = \displaystyle\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)\ ,\ |z|>\rho\ ,\ 0<\rho\le 1$

Transf. Z e Probabilidade: $G_{\mathbb{X}}(z) = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \mathcal{Z}\{p[n]\} = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k]z^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pr\{\mathbb{X}=k\}z^k$

$G_{\mathbb{X}}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}G_{\mathbb{X}}(z)\Big|_{z=0} z^n,$ $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ var. aleat. independentes $\Rightarrow\ \mathcal{E}\{z^{(\mathbb{X}+a\mathbb{Y})}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\}\mathcal{E}\{(z^a)^{\mathbb{Y}}\}$

$\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \displaystyle\sum_k kp[k]\ ,\quad \sigma^2_{\mathbb{X}} = \mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} - \mathcal{E}\{\mathbb{X}\}^2\ ,\quad \mathcal{E}\{\mathbb{X}^m\} = \left(\frac{zd}{dz}\right)^m \mathcal{Z}\{p[n]\}\Big|_{z=1}$

Eq. dif. (Transf. Z): $\mathcal{Z}\{y[n+2]u[n]\} = z^2Y(z) - z^2y[0] - zy[1], \quad \mathcal{Z}\{y[n+1]u[n]\} = zY(z) - zy[0]$

Eq. dif. (Coef. a determinar): $py[n] \triangleq y[n+1]$

degrau: $u[n]$, impulso: $\delta[n]$, $\quad \delta[n] = u[n]-u[n-1], \quad u[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$

$D(p)y[n]=0 \quad\Rightarrow\quad y[n] = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k f_k[n],$ $\quad f_k[n]$ modos próprios (considerando multiplicidades)

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\lambda^n, n\lambda^n, \ldots, n^{r-1}\lambda^n$ são modos próprios.

$D(p)y[n] = N(p)x[n]$, se $\bar{D}(p)x[n]=0$ então $\bar{D}(p)D(p)y[n]=0$

Solução forçada: $\quad y[n] = y_h[n] + y_f[n] \quad\Rightarrow\quad D(p)y_f[n] = N(p)x[n]\ ,\ D(p)y_h[n]=0$

$y_f[n] = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} b_k g_k[n],$ $\quad g_k[n]$ modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)

Variáveis de estado: $\dot{v}(t) = f(v(t),x(t),t),\ y(t) = g(v(t),x(t),t)$

Pontos de equilíbrio: $\bar{v}$ tais que $f(\bar{v},\bar{x})=0$, $\bar{x}$ =cte. Sistema linear (em torno dos pontos de equilíbrio)

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right]\Big|_{\bar{v},\bar{x}}\ ,\ B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\Big|_{\bar{v},\bar{x}}\ ,\ C = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j}\right]\Big|_{\bar{v},\bar{x}}\ ,\ D = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]\Big|_{\bar{v},\bar{x}}$$

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\beta_2p^2+\beta_1p+\beta_0}{p^3+\alpha_2p^2+\alpha_1p+\alpha_0}+\beta_3, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{v} = Av + bx\ ,\ y = cv + dx\ ,\ \frac{N(p)}{D(p)} = c(p\mathrm{I}-A)^{-1}b + d = b'(p\mathrm{I}-A')^{-1}c' + d, \quad p = \frac{d}{dt}$$

$$v = T\hat{v} \quad\Rightarrow\quad \hat{A} = T^{-1}AT,\ \hat{b} = T^{-1}b, \hat{c} = cT \quad , \quad T \text{ não singular}$$