1ª Questão: Determine: a) A função de transferência do sistema $y[n+2]+5y[n]=x[n]$
b) A solução forçada para a entrada $x[n]=(2j)^n+1$

$$H(z)=\frac{1}{z^2+5}, \quad y_f[n]=H(2j)(2j)^n+H(1)(1)^n=(2j)^n+\frac{1}{6}$$

2ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z)=\frac{2z^2+16z}{(z-1)(z+2)}, \quad 1<|z|<2$$

$$X(z)=\frac{2z^2+16z}{(z-1)(z+2)}=\frac{6z}{z-1}-\frac{4z}{z+2}, \quad x[n]=6(1)^n u[n]+4(-2)^n u[-n-1]$$

3ª Questão: Para uma sequência causal cuja transformada Z é dada por

$$Y(z)=\frac{2z(112z^3-264z^2+239z-69)}{(4z-1)^2(z-1)(2z-1)}, \quad |z|>1$$

Determine: a) O valor final $y[+\infty]$ b) O valor inicial $y[0]$
Um polo em $z=1$ e dois polos no interior do círculo de raio 1, aplicam-se as condições do valor final e do valor inicial.

$$\lim_{n\to+\infty} y[n]=\lim_{z\to 1}(z-1)Y(z)=4, \quad y[0]=\lim_{z\to+\infty} Y(z)=\frac{224}{32}=7$$

4ª Questão: A transformada Z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\}=\sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X}=k\}=\frac{z}{(z-2)^2}, \ |z|<2$$

Determine: a) $\Pr\{\mathbb{X}=1\}$

$$\Pr\{\mathbb{W}=1\}=\left(\frac{d}{dz}\right)\frac{z}{(z-2)^2}\Big|_{z=0}=\left(\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{2z}{(z-2)^3}\right)\Big|_{z=0}=\frac{1}{4}$$

b) A média $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\}=\sum_k k\Pr\{\mathbb{X}=k\}$

$$\mathcal{E}\{\mathbb{X}\}=\sum_k k\Pr\{\mathbb{X}=k\}=\left(z\frac{d}{dz}\right)\frac{z}{(z-2)^2}\Big|_{z=1}=z\left(\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{2z}{(z-2)^3}\right)\Big|_{z=1}=\left(\frac{-z^2-2z}{(z-2)^3}\right)\Big|_{z=1}=3$$

c) O momento de segunda ordem $\mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\}=\sum_k k^2\Pr\{\mathbb{X}=k\}$

$$\mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\}=\sum_k k^2\Pr\{\mathbb{X}=k\}=\left(z\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{-z^2-2z}{(z-2)^3}\right)\Big|_{z=1}$$

$$=z\left(\frac{-2z-2}{(z-2)^3}+\frac{3(z^2+2z)}{(z-2)^4}\right)\Big|_{z=1}=\frac{z(z^2+8z+4)}{(z-2)^4}\Big|_{z=1}=13$$

5ª Questão: a) Determine $H(z)$, isto é, a transformada Z da resposta ao impulso (causal) $h[n]$ do sistema descrito pela equação a diferenças $y[n+2]-2y[n+1]-8y[n]=2x[n+2]-26x[n+1]$
b) Determine $h[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ (condições iniciais nulas)

$$(p^2-2p-8)y[n]=(2p^2-26p)x[n], \quad H(z)=\frac{N(p)}{D(p)}\Big|_{p=z}=\frac{2z^2-26z}{z^2-2z-8}=\frac{2z^2-26z}{(z+2)(z-4)}$$

$$H(z)=\frac{5z}{z+2}-\frac{3z}{z-4}, \quad h[n]=\big(5(-2)^n-3(4)^n\big)u[n]$$

6ª Questão: a) Determine $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]u[n]\}$, isto é, a transformada Z da sequência $y[n]u[n]$ solução para $n \geq 0$ da equação a diferenças

$$y[n+2] + 2y[n+1] + y[n] = 0, \quad y[0],\ y[1] \text{ dados}$$

b) Determine $y[n]$ para $y[0] = 3$, $y[1] = -2$

$$Y(z) = \frac{z^2 y[0] + zy[1] + 2zy[0]}{z^2 + 2z + 1} = \frac{3z^2 + 4z}{(z+1)^2} = \frac{z}{(z+1)^2} + \frac{3z}{z+1}, \quad y[n] = (n(-1)^{n-1} + 3(-1)^n)u[n]$$

7ª Questão: a) Determine a solução forçada para $y[n+1] - y[n] = 2n + 10$

$$(p-1)y[n] = 2n + 10, \quad \bar{D}(p) = (p-1)^2, \quad y_f[n] = 9n + n^2$$

b) Determine a solução para $y[0] = 10 \quad \Rightarrow \quad y[n] = 9n + n^2 + 10$

8ª Questão: Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem como solução a sequência

$$y[n] = (3n)^2 + 5n - 2 = 9n^2 + 5n - 2$$

$$\bar{D}(p) = (p-1)^3, \quad (p^3 - 3p^2 + 3p - 1)y[n] = 0,\ y[0] = -2,\ y[1] = 12,\ y[2] = 44$$

9ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio $\bar{v} \in \mathbb{R}$ do sistema abaixo para $x = 0$

$$\dot{v} = (-2v^2 + v^3)(v+2) - 3x = v^4 - 4v^2 - 3x$$

$$(0),\ (-2),\ (2)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se $\dot{v} = Av + bx, \quad v \in \mathbb{R}$ e avalie o comportamento (assintoticamente estável, instável ou indeterminado) a partir da aproximação linear

$$\dot{v} = [4v^3 - 8v] - 3x$$

(2) : $\dot{v} = [16]v - 3x$, instável, (-2) : $\dot{v} = [-16]v - 3x$, assint. estável, (0) : $\dot{v} = [0]v - 3x$, indefinido

10ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\ddddot{y} + 4\dddot{y} + 3\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 3\ddddot{x} + 7\dddot{x} + 11\ddot{x} + \dot{x} + 14x$$

com a matrix de saída c dada por

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$