1ª Questão: Determine $v(t)$ para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -4 & 15 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} v, \ v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 15 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda + 4 & -15 \\ 2 & \lambda - 7 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

$$v(t) = \exp(At)v(0), \quad \exp(At) = \rho_0 I + \rho_1 A$$

$$\exp(t) = \rho_0 + \rho_1, \ \exp(2t) = \rho_0 + 2\rho_1, \quad \rho_0 = 2\exp(t) - \exp(2t), \ \rho_1 = -\exp(t) + \exp(2t)$$

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} \rho_0 - 4\rho_1 & 15\rho_1 \\ -2\rho_1 & \rho_0 + 7\rho_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\exp(t) - 5\exp(2t) & -15\exp(t) + 15\exp(2t) \\ 2\exp(t) - 2\exp(2t) & -5\exp(t) + 6\exp(2t) \end{bmatrix}$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} -9\exp(t) + 10\exp(2t) \\ -3\exp(t) + 4\exp(2t) \end{bmatrix}$$

2ª Questão: Determine: a) J (forma de Jordan); b) Q tal que $AQ = QJ$ para

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \lambda^3$$

$$A - (0)I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \ \text{rank} = 2, \ \text{dimensão do espaço nulo} = 3 - 2 = 1$$

$$\Rightarrow J = J_3(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} b & e - b & g \\ b & e & e - 2b + g \\ -b & -e & 3b - e - g \end{bmatrix}, \ b = e = 1, g = 0$$

3ª Questão: Determine um sistema linear homogêneo $\dot{v} = Av$, $y = cv$ e a condição inicial $v(0)$ (i.e., matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vetores $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ e $v(0) \in \mathbb{R}^n$) que produzem como solução

$$y(t) = (10 + 5t + t^2/5)\exp(-3t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \exp(At) = \exp(-3t) \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

4ª Questão: Determine uma matriz $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ que verifique (I representa a matriz identidade de dimensão adequada)

$$A^2 + 4A - 2I = A^{-2} - 2A^{-1} + I$$

$$A^2 + 4A - 3I + 2A^{-1} - A^{-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad A^4 + 4A^3 - 3A^2 + 2A - I = 0$$

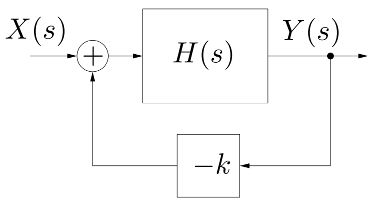
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

5ª Questão: Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema deixa de ser observável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \end{bmatrix} v \quad \Rightarrow \quad \text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & a & a \\ a + 1 & a & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\text{Obsv}(A, b)) = -a^3 - a^2 = -(a + 1)a^2 = 0, \quad a = 0, \ a = -1$$

6ª Questão: Determine o intervalo para $k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável



$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 16s + 16}$$

$$D(s) = s^3 + 6s^2 + 16s + 16 \quad , \quad -16 < k < 80$$

7ª Questão: Usando como função de Lyapunov candidata $\psi(v) = v^2$, determine um conjunto Ω no espaço de estados $\mathbb{R}$ no qual a função $\psi(v)$ garanta a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $(v_e) = (0)$ do sistema não linear dado por

$$\dot{v} = -5v + v^3$$

$$\psi(v) = v^2 > 0, \ \forall v \neq 0, \quad \frac{d}{dt}\psi(v) = 2v\dot{v} = 2v(-5v + v^3) = 2v^2(v^2 - 5) < 0, \ \forall -\sqrt{5} < v < \sqrt{5}$$

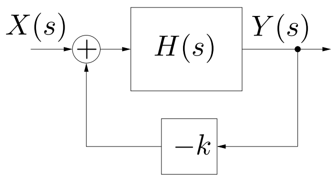
$$\Omega = \{v \ : \ -\sqrt{5} < v < \sqrt{5}\}$$

8ª Questão: Classifique os sistemas lineares invariantes no tempo em termos de estabilidade da origem (assintoticamente estável, estável ou instável), justificando.

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Instável (parte real nula com bloco de Jordan de tamanho não mínimo)
b) Estável (parte real nula com bloco de Jordan de tamanho mínimo)

9ª Questão: Determine os intervalos sobre o eixo real nos quais existe lugar das raízes, o número de assíntotas, os ângulos das assíntotas e o ponto de encontro das assíntotas no eixo real para

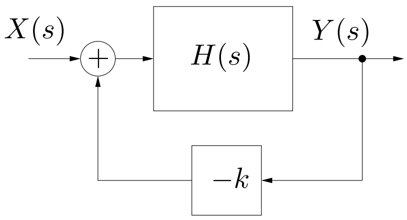


$$H(s) = \frac{(s-2)^2(s-1-5j)(s-1+4j)}{(s-5)(s-3-5j)(s-3+5j)(s+3)^2(s+5)}$$

Eixo real: $[-5, 5]$, Número: $\eta = 6 - 4 = 2$

Ângulos: $\pm\frac{\pi}{2}$, Encontro: $(5 + 3 + 3 - 3 - 3 - 5 - (2 + 2 + 1 + 1))/2 = -3$

10ª Questão: Determine, para o lugar das raízes do sistema realimentado mostrado na figura ao lado



$$H(s) = \frac{s^2 + 5s + 4}{s^2 - 5s + 4} = \frac{(s+1)(s+4)}{(s-1)(s-4)}$$

a) Os cruzamentos no eixo real; b) Os valores de $k > 0$ nos cruzamentos

a) Cruzamentos no eixo real: $D(s)\dot{N}(s) - \dot{D}(s)N(s) = 0$

$$(s^2 + 5s + 4)(2s - 5) - (s^2 - 5s + 4)(2s + 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad 10s^2 - 40 = 0, \ s = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

b) Valores de k

$$k\frac{|(s+1)||(s+4)|}{|(s-1)|(s-4)|}\Big|_{s=\pm 2} = 1 \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{1 \times 2}{3 \times 6} = \frac{1}{9}, \quad k_{-2} = \frac{3 \times 6}{1 \times 2} = 9$$