1ª Questão: Determine: a) A função de transferência do sistema $y[n+2] - y[n] = x[n+1]$
b) A solução forçada para a entrada $x[n] = 2(j)^n$

$$H(z) = \frac{z}{z^2-1}, \quad y_f[n] = 2H(j)(j)^n = -j(j)^n = -(j)^{n+1}$$

2ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{-z^2-21z}{(z+1)(z-3)}, \quad 1 < |z| < 3$$

$$X(z) = \frac{-z^2-21z}{(z+1)(z-3)} = \frac{5z}{z+1} - \frac{6z}{z-3}, \quad x[n] = 5(-1)^n u[n] + 6(3)^n u[-n-1]$$

3ª Questão: Para uma sequência causal cuja transformada Z é dada por

$$Y(z) = \frac{5z^3-4z^2+8z}{(z^2+1)(z-1)(z+1)}, \quad |z| > 1$$

Determine: a) O valor final $y[+\infty]$ b) O valor inicial $y[0]$
Um polo em $z=1$, um polo em $z=-1$ e um par de polos em $\pm j$, não se aplicam as condições do valor final, apenas as do valor inicial.

$$\lim_{n\to+\infty} y[n] = \nexists, \quad y[0] = \lim_{z\to+\infty} Y(z) = 0$$

4ª Questão: A transformada Z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X}=k\} = \frac{4z}{(z-3)^2}, \ |z| < 3$$

Determine: a) $\Pr\{\mathbb{X}=1\}$

$$\Pr\{\mathbb{W}=1\} = \left(\frac{d}{dz}\right)\frac{4z}{(z-3)^2}\Big|_{z=0} = \left(\frac{4}{(z-3)^2} - \frac{8z}{(z-3)^3}\right)\Big|_{z=0} = \frac{4}{9}$$

b) A média $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X}=k\}$

$$\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k\Pr\{\mathbb{X}=k\} = \left(z\frac{d}{dz}\right)\frac{4z}{(z-3)^2}\Big|_{z=1} = z\left(\frac{4}{(z-3)^2} - \frac{8z}{(z-3)^3}\right)\Big|_{z=1} = \left(\frac{-4z^2-12z}{(z-3)^3}\right)\Big|_{z=1} = 2$$

c) O momento de segunda ordem $\mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} = \sum_k k^2 \Pr\{\mathbb{X}=k\}$

$$\mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} = \sum_k k^2\Pr\{\mathbb{X}=k\} = \left(z\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{-4z^2-12z}{(z-3)^3}\right)\Big|_{z=1} = \frac{4z^2+48z+36}{(z-3)^4}\Big|_{z=1} = \frac{88}{16} = \frac{11}{2}$$

5ª Questão: a) Determine $H(z)$, isto é, a transformada Z da resposta ao impulso (causal) $h[n]$ do sistema descrito pela equação a diferenças $y[n+2] - y[n] = 3x[n+2] + 7x[n+1]$
b) Determine $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ (condições iniciais nulas)

$$(p^2-1)y[n] = (3p^2+7p)x[n], \quad H(z) = \frac{N(p)}{D(p)}\Big|_{p=z} = \frac{3z^2+7z}{z^2-1} = \frac{3z^2+7z}{(z-1)(z+1)}$$

$$H(z) = \frac{5z}{z-1} - \frac{2z}{z+1}, \quad h[n] = \big(5 - 2(-1)^n\big)u[n]$$

6ª Questão: a) Determine $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]u[n]\}$, isto é, a transformada Z da sequência $y[n]u[n]$ solução para $n \geq 0$ da equação a diferenças

$$y[n+2] - 4y[n+1] + 4y[n] = 0, \quad y[0], y[1] \text{ dados}$$

b) Determine $y[n]$ para $y[0] = 5$, $y[1] = 4$

$$Y(z) = \frac{z^2 y[0] + zy[1] - 4zy[0]}{(z-2)^2} = \frac{5z^2 - 16z}{(z-2)^2} = \frac{-6z}{(z-2)^2} + \frac{5z}{z-2}, \quad y[n] = (-6n(2)^{n-1} + 5(2)^n)u[n]$$

7ª Questão: a) Determine a solução forçada para $y[n+1] - y[n] = 5n$

$$(p-1)y[n] = 5n, \quad \bar{D}(p) = (p-1)^2, \ y_f[n] = -(5/2)n + (5/2)n^2$$

b) Determine a solução para $y[0] = 10 \quad \Rightarrow \quad y[n] = -(5/2)n + (5/2)n^2 + 10$

8ª Questão: Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem como solução a sequência

$$y[n] = (2n)^2 + 5 = 4n^2 + 5$$

$$\bar{D}(p) = (p-1)^3, \quad (p^3 - 3p^2 + 3p - 1)y[n] = 0, \ y[0] = 5, y[1] = 9, y[2] = 21$$

9ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio $\bar{v} \in \mathbb{R}$ do sistema abaixo para $x = 0$

$$\dot{v} = -(v+2)^2(v^2 - 1) + 5x = -v^4 - 4v^3 - 3v^2 + 4v + 4 + 5x$$

$$(-1), \ (1), \ (-2)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se $\dot{v} = Av + bx, \quad v \in \mathbb{R}$ e avalie o comportamento (assintoticamente estável, instável ou indeterminado) a partir da aproximação linear

$$\dot{v} = [-4v^3 - 12v^2 - 6v + 4]v + 5x$$

$(-1): \ \dot{v} = [2]v + 5x$, instável, $\quad (1): \ \dot{v} = [-18]v + 5x$, assint. estável, $\quad (-2): \ \dot{v} = [0]v + 5x$, indefinido

10ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\ddot{\ddot{y}} - 5\dddot{y} + 2\ddot{y} - 7y = 5\ddot{\ddot{x}} - 17\dddot{x} + 16\ddot{x} + 4\dot{x} - 33x$$

com a matrix de saída c dada por

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad d = [5]$$