$1^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine $v(t)$ para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} v, \ v(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 4 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$$

$$v(t) = \exp(At)v(0), \quad \exp(At) = \rho_0 I + \rho_1 A$$

$$\exp(-2t) = \rho_0 - 2\rho_1, \ \exp(t) = \rho_0 + \rho_1, \quad \rho_0 = \frac{2\exp(t) + \exp(-2t)}{3}, \ \rho_1 = \frac{\exp(t) - \exp(-2t)}{3}$$

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} \rho_0 + 2\rho_1 & \rho_1 \\ -4\rho_1 & \rho_0 - 3\rho_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4\exp(t) - \exp(-2t) & \exp(t) - \exp(-2t) \\ -4\exp(t) + 4\exp(-2t) & -\exp(t) + 4\exp(-2t) \end{bmatrix}$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} 5\exp(t) - 2\exp(-2t) \\ -5\exp(t) + 8\exp(-2t) \end{bmatrix}$$

$2^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine: a) J (forma de Jordan); b) Q tal que $AQ = QJ$ para

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \lambda^3$$

$$A - (0)I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \text{ rank} = 1, \text{ dimensão do espaço nulo} = 3 - 1 = 2$$

$$\Rightarrow J = \text{diag}(J_2(0), J_1(0)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} a & d & a \\ a & e & b \\ -a & a + d - 2e & a - 2b \end{bmatrix}, \ b \neq a$$

$3^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine um sistema linear homogêneo $\dot{v} = Av$, $y = cv$ e a condição inicial $v(0)$ (i.e., matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vetores $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ e $v(0) \in \mathbb{R}^n$) que produzem como solução

$$y(t) = (1 + 2t + 3t^2)\exp(5t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \exp(At) = \exp(5t) \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$4^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine uma matriz $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ que verifique (I representa a matriz identidade de dimensão adequada)

$$A + I = A^{-1}(3A^2 - 4A + 5I)A^{-2} - I$$

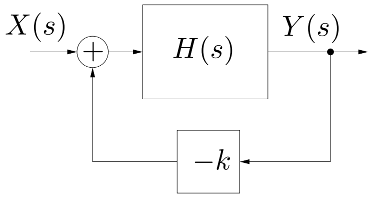
$$A + 2I - 3A^{-1} + 4A^{-2} - 5A^{-3} = 0 \quad \Rightarrow \quad A^4 + 2A^3 - 3A^2 + 4A - 5I = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

$5^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema deixa de ser controlável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x \quad \Rightarrow \quad \text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & 3a \\ 1 & 3 & a + 9 \\ 0 & a & a \end{bmatrix}$$

$$\det(\text{Ctrb}(A, b)) = -a^3 - 4a^2 = (-a - 4)a^2 = 0, \quad a = 0, \ a = -4$$



6ª Questão: Determine o intervalo para $k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + 7s + 10}$$

$$D(s) = s^3 + ks^2 + (7-k)s + 10 \quad , \quad 2 < k < 5$$

7ª Questão: Usando como função de Lyapunov candidata $\psi(v) = v^2$, determine um conjunto Ω no espaço de estados $\mathbb{R}$ no qual a função $\psi(v)$ garanta a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $(v_e) = (0)$ do sistema não linear dado por

$$\dot{v} = (v^2 - 3)v$$

$$\psi(v) = v^2 > 0,\ \forall v \neq 0, \quad \frac{d}{dt}\psi(v) = 2v\dot{v} = 2(v^2-3)v^2 < 0,\ \forall -\sqrt{3} < v < \sqrt{3}$$

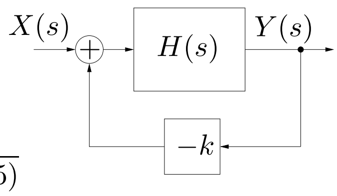
$$\Omega = \{v \ : \ -\sqrt{3} < v < \sqrt{3}\}$$

8ª Questão: Classifique os sistemas lineares invariantes no tempo em termos de estabilidade da origem (assintoticamente estável, estável ou instável), justificando.

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} -2 & -10 & 1 & 0 \\ 10 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Instável (parte real nula — forma modal — com bloco de Jordan de tamanho não mínimo)
b) Assintoticamente estável (parte real negativa de todos os autovalores)

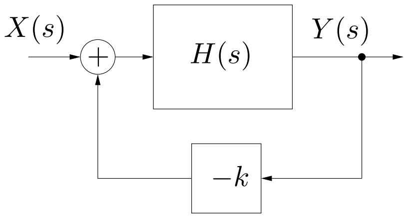
9ª Questão: Determine os intervalos sobre o eixo real nos quais existe lugar das raízes, o número de assíntotas, os ângulos das assíntotas e o ponto de encontro das assíntotas no eixo real para



$$H(s) = \frac{s^2}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(s-5)(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)}$$

Eixo real: $[4,5], [2,3], [-1,1], [-3,-2], [-5,-4]$, Número: $\eta = 10 - 2 = 8$

Ângulos: $\pm\frac{\pi}{8}, \pm\frac{3\pi}{8}, \pm\frac{5\pi}{8}, \pm\frac{7\pi}{8}$, Encontro: 0



10ª Questão: Determine, para o lugar das raízes do sistema realimentado mostrado na figura ao lado

$$H(s) = \frac{s^2 - 13s + 36}{s^2 + 13s + 36} = \frac{(s-4)(s-9)}{(s+4)(s+9)}$$

a) Os cruzamentos no eixo real; b) Os valores de $k > 0$ nos cruzamentos

a) Cruzamentos no eixo real: $D(s)\dot{N}(s) - \dot{D}(s)N(s) = 0$

$$(s^2 - 13s + 36)(2s + 13) - (s^2 + 13s + 36)(2s - 13) = 0 \quad \Rightarrow \quad -26s^2 + 936 = 0,\ s = \pm\sqrt{36} = \pm 6$$

b) Valores de k

$$k\frac{|(s-4)||(s-9)|}{|(s+4)|(s+9)|}\Big|_{s=\pm 6} = 1 \quad \Rightarrow \quad k_6 = \frac{10 \times 15}{2 \times 3} = 25, \quad k_{-6} = \frac{2 \times 3}{15 \times 10} = \frac{1}{25}$$