

**1ª Questão:** Determine  $V(s)$  para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V(s) = (sI - A)^{-1}v(0) = \begin{bmatrix} s-5 & 2 \\ -2 & s-5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V(s) = \frac{1}{s^2 - 10s + 29} \begin{bmatrix} s-5 & -2 \\ 2 & s-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 - 10s + 29} \begin{bmatrix} s-7 \\ s-3 \end{bmatrix}$$

**2ª Questão:** Determine a forma de Jordan  $J$  tal que  $AQ = QJ$  para

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda + 5)^3$$

$$A - (-5)I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank} = 1, \quad \text{dimensão do espaço nulo} = 3 - 1 = 2$$

$$\Rightarrow J = \text{diag}(J_2(-5), J_1(-5)) = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

**3ª Questão:** Determine um sistema linear homogêneo  $\dot{y} = Ay$ ,  $y = cv$  e a condição inicial  $v(0)$  (i.e., matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , vetores  $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  e  $v(0) \in \mathbb{R}^n$ ) que produzem como solução

$$y(t) = (2t + 3) \exp(-2t) \cos(4t) + (5t + 6) \exp(-2t) \sin(4t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \exp(At) = \exp(-2t) \begin{bmatrix} \cos(4t) & -\sin(4t) & t \cos(4t) & -t \sin(4t) \\ \sin(4t) & \cos(4t) & t \sin(4t) & t \cos(4t) \\ 0 & 0 & \cos(4t) & -\sin(4t) \\ 0 & 0 & \sin(4t) & \cos(4t) \end{bmatrix}$$

$$c = [2 \quad 5 \quad 3 \quad 6], \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**4ª Questão:** Determine  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  tais que  $A^{-3} = \alpha_0 I + \alpha_1 A$ ,  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \det \left( \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

$$(-1)^{-3} = \alpha_0 - \alpha_1, \quad 2^{-3} = \alpha_0 + 2\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{-5}{8}, \quad \alpha_1 = \frac{3}{8}$$

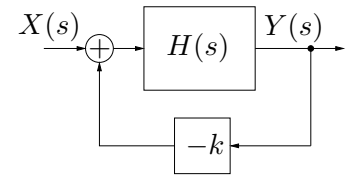
**5ª Questão:** Determine os valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  para os quais o sistema deixa de ser observável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & -\alpha \\ 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix} v, \quad y = [1 \quad 0 \quad 1] v$$

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta + 1 & -\alpha \\ -\alpha^2 + \beta + 1 & \alpha\beta - \alpha & -\alpha^2 + \beta + 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\text{Obsv}(A, c)) = 2\alpha^2(\beta - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1$$

**6ª Questão:** Determine o intervalo para  $k \in \mathbb{R}$  tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável



$$H(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + 10s + 16}$$

$$D(s) = s^3 + ks^2 + (10 - k)s + 16, \quad 2 < k < 8$$

**7ª Questão:** Usando como função de Lyapunov candidata  $\psi(v_1, v_2) = 0.5v_1^2 + 0.5v_2^2$ , determine um conjunto  $\Omega$  no espaço de estados  $\mathbb{R}^2$  no qual a função  $\psi(v_1, v_2)$  garanta a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio  $(v_1, v_2) = (0, 0)$  do sistema não linear dado por

$$\dot{v}_1 = v_1^3 v_2^2 - 2v_1^2 v_2^2 - 3v_1 v_2^2, \quad \dot{v}_2 = v_1^2 v_2^3 - 3v_1^2 v_2^2 - 10v_1^2 v_2$$

Tem-se  $\psi(v_1, v_2) > 0, \forall (v_1, v_2) \neq (0, 0)$  e

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(v_1, v_2) &= v_1 \dot{v}_1 + v_2 \dot{v}_2 \\ &= v_1(v_1^3 v_2^2 - 2v_1^2 v_2^2 - 3v_1 v_2^2) + v_2(v_1^2 v_2^3 - 3v_1^2 v_2^2 - 10v_1^2 v_2) \\ &= v_1^2 v_2^2 (v_1^2 - 2v_1 - 3) + v_1^2 v_2^2 (v_2^2 - 3v_2 - 10) < 0, \quad \forall (v_1, v_2) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

$$\Omega = \{(v_1, v_2) : \underbrace{(v_1^2 - 2v_1 - 3 < 0)}_{(v_1+1)(v_1-3) < 0} \& \underbrace{(v_2^2 - 3v_2 - 10 < 0)}_{(v_2+2)(v_2-5) < 0}\} \Rightarrow \{(v_1, v_2) : -1 < v_1 < 3, -2 < v_2 < 5\}$$

**8ª Questão:** Classifique os sistemas lineares invariantes no tempo em termos de estabilidade da origem (assintoticamente estável, estável ou instável), justificando.

a)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

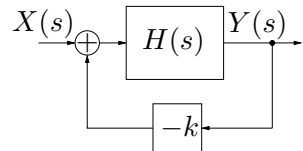
Instável (parte real nula — forma de Jordan de tamanho não mínimo)

b)  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Estável (parte real nula em blocos modais de Jordan de tamanho mínimo)

**9ª Questão:** Determine os intervalos sobre o eixo real nos quais existe lugar das raízes, o número de assíntotas, os ângulos das assíntotas e o ponto de

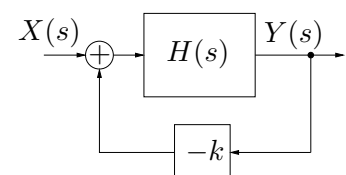
encontro das assíntotas no eixo real para  $H(s) = \frac{s - 8}{(s + 4)^{13}}$



Eixo real:  $[-4, 8]$ , Número:  $\eta = 13 - 1 = 12$

Ângulos:  $\pm \frac{\pi}{12}, \pm \frac{3\pi}{12}, \pm \frac{5\pi}{12}, \pm \frac{7\pi}{12}, \pm \frac{9\pi}{12}, \pm \frac{11\pi}{12}$ , Encontro:  $\frac{1}{12}(13 \times (-4) - (8)) = -\frac{60}{12} = -5$

**10ª Questão:** Determine, para o lugar das raízes do sistema realimentado mostrado na figura ao lado



$$H(s) = \frac{s^2 + 10s + 16}{s^2 - 10s + 16} = \frac{(s + 2)(s + 8)}{(s - 2)(s - 8)}$$

a) Cruzamentos no eixo real:  $D(s)\dot{N}(s) - \dot{D}(s)N(s) = 0$

$$(s^2 - 10s + 16)(2s + 10) - (s^2 + 10s + 16)(2s - 10) = 0 \Rightarrow 20s^2 - 320 = 0, \quad s = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

b) Valores de  $k$

$$k \left| \frac{(s + 2)(s + 8)}{(s - 2)(s - 8)} \right|_{s=\pm 4} = 1 \Rightarrow k_4 = \frac{2 \times 4}{6 \times 12} = \frac{1}{9}, \quad k_{-4} = \frac{6 \times 12}{2 \times 4} = 9$$