

Nome: .....

RA: .....

**Obs.:** Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

**1ª Questão:** Determine a solução forçada  $y_f(t)$  para a entrada  $x(t) = \cos^2(t)$  do sistema linear invariante no tempo cuja resposta ao impulso é dada por

$$h(t) = \text{sen}(t)u(t)$$

**2ª Questão:** Determine a transformada inversa (bilateral) de Laplace  $x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(s))$  para

$$X(s) = \frac{10}{s^2 - 2s + 5}, \quad \text{Re}(s) < 1$$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

**3ª Questão:** Determine  $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$  (transformada de Laplace bilateral inversa) para

$$X(s) = \frac{-5s^2 + 12s - 15}{(s - 1)^2(s - 5)}, \quad 1 < \text{Re}(s) < 5$$

**4ª Questão:** a) Determine a transformada unilateral de Laplace  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ , sendo  $y(t)$  a solução da equação diferencial abaixo

$$\ddot{y} - \dot{y} - 30y = 0, \quad y(0), \dot{y}(0) \text{ dados}$$

b) Determine a solução para  $y(0) = 1$  e  $\dot{y}(0) = 50$

**5ª Questão:** Determine a resposta ao degrau  $y_u(t)$  (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 13y = 8\ddot{x} + 15\dot{x} + 52x$$

**6ª Questão:** Determine o valor da integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} th(t)dt, \quad h(t) = t \exp(-t)\text{sen}(t)u(t)$$

**7ª Questão:** a) Determine a solução forçada  $y_f(t)$  da equação diferencial

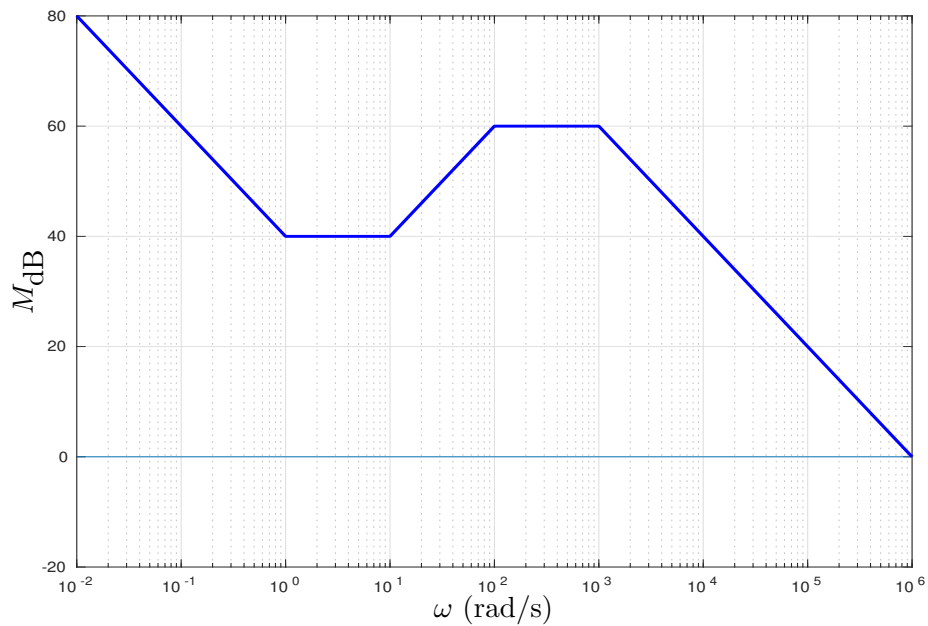
$$p(p+1)y = t+1$$

b) Determine a solução para  $y(0) = 5$ ,  $\dot{y}(0) = 10$

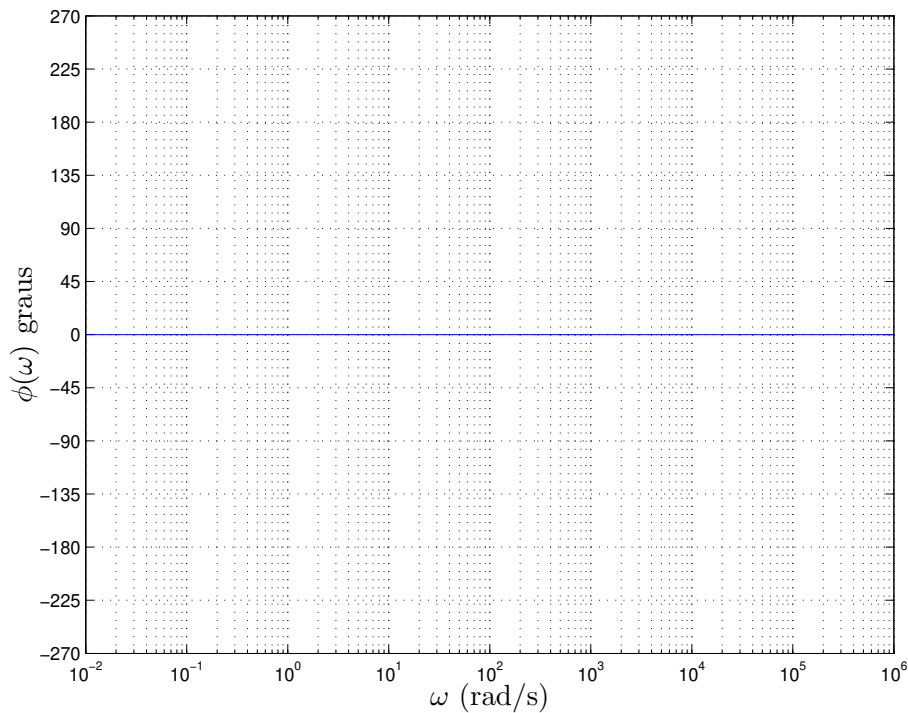
**8ª Questão:** Determine uma equação diferencial homogênea e as condições iniciais que produzem a mesma solução que

$$(p^2 + 2p + 10)y = -6 \text{sen}(3t) \exp(-t), \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$$

9ª Questão: Considere as assíntotas de módulo do diagrama de Bode em escala logarítmica da função de transferência de um sistema linear invariante no tempo de fase mínima da figura abaixo.



a) Esboce as assíntotas de fase (em graus)

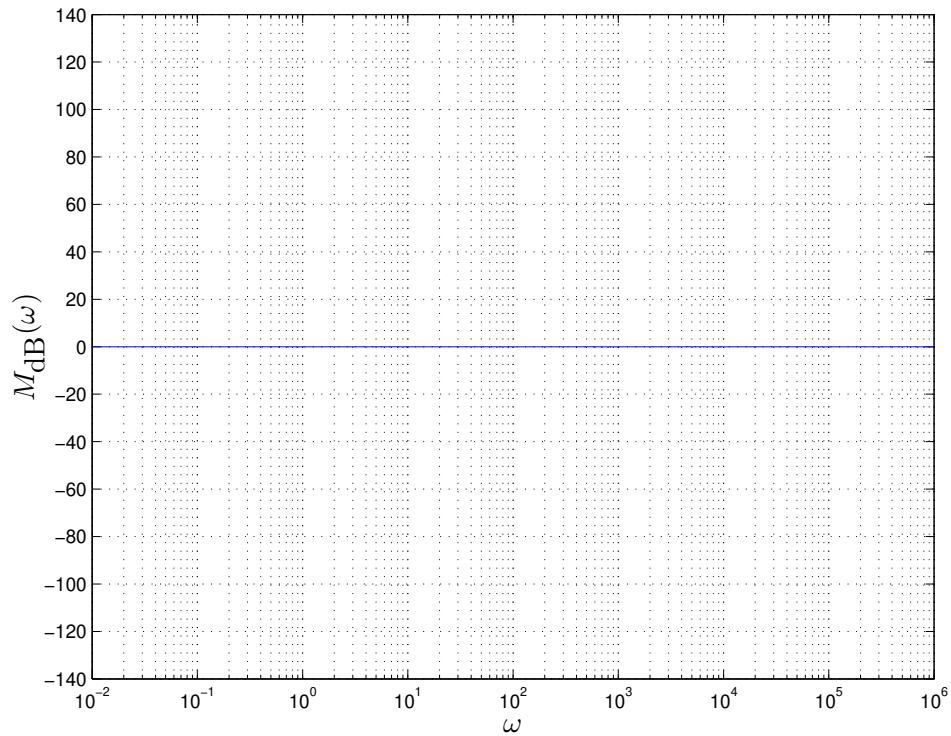


b) Baseando-se nos diagramas assintóticos de módulo e fase, determine a solução forçada do sistema para a entrada  $x(t) = 20 \cos(10t) + 50 \sin(1000t)$

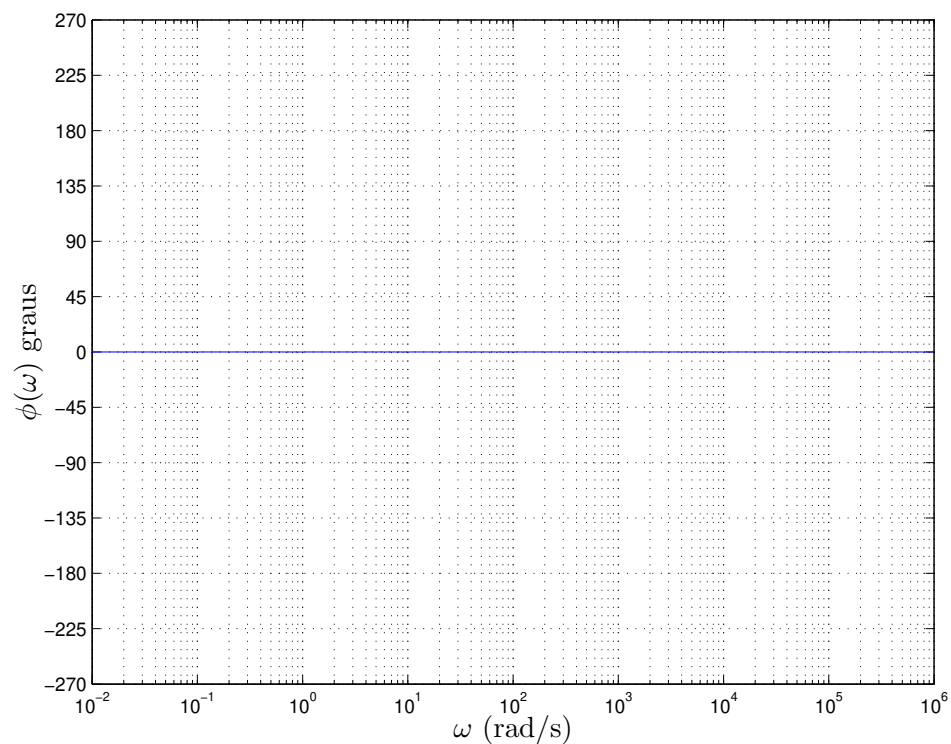


**10<sup>a</sup> Questão:** a) Esboce as assíntotas do módulo (diagrama de Bode em escala logarítmica) do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{10^4 s(s + 100)}{(s + 1)(s + 1000)}$$



b) Esboce as assíntotas da fase (diagrama de Bode em graus) do sistema.



$$u(t) \text{ (função degrau)}, \quad \delta(t) \text{ (função impulso)}, \quad \delta(t) = \frac{d}{dt}u(t), \quad u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\beta)d\beta$$

$$G_T(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2), \quad \text{Tri}_{2T}(t) = (t/T + 1)G_T(t + T/2) + (-t/T + 1)G_T(t - T/2)$$

Sistema linear invariante no tempo: Autofunção  $x(t) = \exp(st) \Rightarrow y_f(t) = H(s) \exp(st)$

$$h(t) \text{ real: } x(t) = \cos(\omega t) \Rightarrow y_f(t) = |H(j\omega)| \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$$

$$x(t) = \sin(\omega t) \Rightarrow y_f(t) = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \angle H(j\omega))$$

**Transformada de Laplace (bilateral):**

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(-st) dt, \quad s \in \Omega_h, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = X(s) \Big|_{s=0}, \quad 0 \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{L}\{x(t) = x_1(t) * x_2(t)\} = \mathcal{L}\{x_1(t)\} \mathcal{L}\{x_2(t)\}, \quad \Omega_x = \Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$$

$$\mathcal{L}\{y(t) = x(t - \tau)\} = X(s) \exp(-s\tau), \quad \Omega_y = \Omega_x, \quad \mathcal{L}\{\exp(-at)u(t)\} = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}(s+a) > 0$$

$$\mathcal{L}\{x(-t)\} = X(-s), \quad -s \in \Omega_x, \quad \mathcal{L}\{-\exp(-at)u(-t)\} = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}(s+a) < 0$$

$$\mathcal{L}\{\exp(-\alpha t) \cos(\beta t) u(t)\} = \frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}, \quad \mathcal{L}\{\exp(-\alpha t) \sin(\beta t) u(t)\} = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}, \quad \text{Re}(s+\alpha) > 0$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!} \exp(-at) u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}}, \quad \text{Re}(s+a) > 0, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\left\{y(t) = \int_{-\infty}^t x(\beta) u(\beta) d\beta\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{x(t)\}, \quad \Omega_y \supset \Omega_x \cap \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 0\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!} u(t)\right\} = \frac{1}{s^{m+1}}, \quad \text{Re}(s) > 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}\{y(t) = \exp(-at)x(t)\} = X(s+a); \quad \Omega_y = (s+a) \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\{y(t) = t^m x(t)\} = (-1)^m \frac{d^m X(s)}{ds^m}, \quad \Omega_y = \Omega_x, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s), \quad \Omega_{\dot{x}} \supset \Omega_x$$

**Transformada de Laplace (unilateral):**

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t) \exp(-st) dt, \quad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \text{Re}(s) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0), \quad \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - \dot{x}(0), \quad s \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\left\{x^{(m)}(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right\} = s^m \mathcal{L}\{x(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} x^{(k)}(0)$$

$$x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

**Coefficientes a determinar (equações diferenciais):**  $py(t) \triangleq \frac{d}{dt}y(t)$

$$D(p)y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=1}^m a_k f_k(t), \quad f_k(t) \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se  $\lambda$  é raiz de multiplicidade  $r$  de  $D(\lambda)$ , então  $\exp(\lambda t)$ ,  $t \exp(\lambda t)$ ,  $\dots$ ,  $t^{r-1} \exp(\lambda t)$  são modos próprios.

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad , \quad \text{se } \bar{D}(p)x(t) = 0 \text{ então } \bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$$

$$\text{Solução forçada: } y(t) = y_h(t) + y_f(t) \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f(t) = N(p)x(t) \quad , \quad D(p)y_h(t) = 0$$

$$y_f(t) = \sum_{k=1}^m b_k g_k(t), \quad g_k(t) \text{ modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)}$$

**Resposta em Frequência:**  $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(-st) dt \quad , \quad H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$

Diagramas assintóticos de Bode: gráficos do módulo (em dB) e da fase (em graus) versus a frequência em escala logarítmica.

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log M(\omega) \quad (\text{sendo } \log \text{ o logaritmo na base } 10)$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad \Rightarrow \quad M_{\text{dB}}(\omega) = M_{1\text{dB}}(\omega) + M_{2\text{dB}}(\omega) \quad ; \quad \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

$\omega_c$  (frequência de corte): encontro das assíntotas de baixa e alta frequência

Polos complexos:  $0 < \xi < 1$ ,  $\omega_n > 0$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^* = \lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\text{pico } (0 < \xi < 1/\sqrt{2}): \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad ; \quad M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$