1ª Questão: Determine $V(s)$ para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V(s) = (sI - A)^{-1} v(0) = \begin{bmatrix} s-4 & -1 \\ -6 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V(s) = \frac{1}{s^2 - 3s - 10} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 6 & s-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s-5)} \begin{bmatrix} 2s+3 \\ s+8 \end{bmatrix}$$

2ª Questão: Determine a forma de Jordan J tal que $AQ = QJ$ para

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda+3)^3$$

$$A - (-3)I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \text{ rank} = 2, \text{ dimensão do espaço nulo} = 3 - 2 = 1$$

$$\Rightarrow J = J_3(-3) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

3ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \ , \ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \ , \ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função $y(t) = 3t^2 \exp(-2t)\cos(t)$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(ou trocando } 6 \leftrightarrow 1\text{)}$$

4ª Questão: Determine α_0 e α_1 tais que

$$A^{-2} = \alpha_0 I + \alpha_1 A, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-4 & -2 \\ 5 & \lambda+7 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + 3\lambda - 18 = (\lambda-3)(\lambda+6)$$

$$(3)^{-2} = \alpha_0 + 3\alpha_1, \ (-6)^{-2} = \alpha_0 - 6\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{1}{12}, \ \alpha_1 = \frac{1}{108}$$

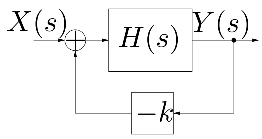
5ª Questão: Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema deixa de ser controlável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ -\alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$\text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2 b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha+\beta & \beta^2 + \alpha\beta + \alpha \\ 1 & 1 & -\alpha^2 + \alpha + 1 \\ 1 & \beta+1 & \beta^2 + \beta + 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\text{Ctrb}(A, b)) = -\alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha = -\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \ \alpha = 1, \ \nexists\beta$$

6ª Questão: Determine o intervalo para $k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável



$$H(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + 7s + 12}$$

$$D(s) = s^3 + ks^2 + (7-k)s + 12 \quad , \quad 3 < k < 4$$

7ª Questão: Usando como função de Lyapunov candidata $\psi(v_1, v_2) = 0.5v_1^2 + 0.5v_2^2$, determine um conjunto Ω no espaço de estados $\mathbb{R}^2$ no qual a função $\psi(v_1, v_2)$ garanta a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $(v_1, v_2) = (0, 0)$ do sistema não linear dado por $\dot{v}_1 = v_1^3 v_2^2 - 5v_1 v_2^2$; $\dot{v}_2 = v_1^2 v_2^3 - 7v_1^2 v_2$

Tem-se $\psi(v_1, v_2) > 0$, $\forall (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ e

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(v_1, v_2) &= v_1\dot{v}_1 + v_2\dot{v}_2 = v_1(v_1^3 v_2^2 - 5v_1 v_2^2) + v_2(v_1^2 v_2^3 - 7v_1^2 v_2) \\
&= v_1^4 v_2^2 - 5v_1^2 v_2^2 + v_1^2 v_2^4 - 7v_1^2 v_2^2 \\
&= v_1^2 v_2^2 (v_1^2 - 5) + v_1^2 v_2^2 (v_2^2 - 7) \\
&= v_1^2 v_2^2 (v_1^2 + v_2^2 - 12) < 0, \quad \forall (v_1, v_2) \neq (0, 0)
\end{aligned}$$

Se $(v_1, v_2) \in \Omega = \{(v_1, v_2) : v_1^2 + v_2^2 - 12 < 0\}$ ou $\Omega = \{(v_1, v_2) : (v_1^2 - 5 < 0) \;\&\; (v_2^2 - 7 < 0)\}$

8ª Questão: Classifique os sistemas lineares invariantes no tempo em termos de estabilidade da origem (assintoticamente estável, estável ou instável), justificando.

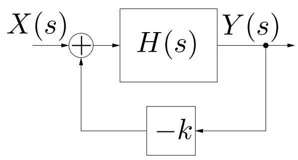
a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Instável (autovalor com parte real positiva)

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

Estável (parte real nula em blocos modais de Jordan de tamanho mínimo)

9ª Questão: Determine os intervalos sobre o eixo real nos quais existe lugar das raízes, o número de assíntotas, os ângulos das assíntotas e o ponto de encontro das assíntotas no eixo real para

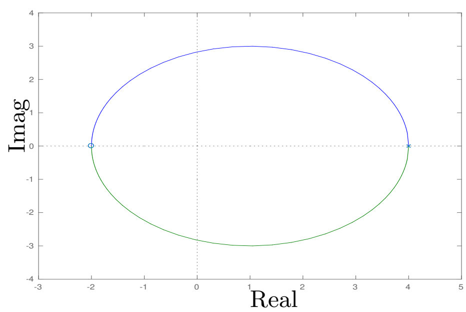


$$H(s) = \frac{(s-10)(s-20)}{(s+1)^7(s+10)^5}$$

Eixo real: $[-10, -1], [10, 20]$, Número: $\eta = 12 - 2 = 10$

Ângulos: $\pm\frac{\pi}{10}, \pm\frac{3\pi}{10}, \pm\frac{5\pi}{10} = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{10}, \pm\frac{9\pi}{10}$, Encontro: $\frac{1}{10}(-7 - 50 - (10 + 20)) = -\frac{87}{10} = -8.7$

10ª Questão: No lugar das raízes da figura (dois polos em 4, dois zeros em -2), determine os valores de ω e o valor de k nos cruzamentos com o eixo imaginário.



$$D(s) + kN(s) = (s^2 - 8s + 16) + k(s^2 + 4s + 4) = 0$$

$$s = j\omega, \quad (4k\omega - 8\omega)j = 0, \; -\omega^2 + 16 - k\omega^2 + 4k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2, \; \omega^2 = 8$$